Université Bourgogne Europe
U.F.R. Sciences et Techniques
Licence Sciences Technologies Santé

Année: 2024 – 2025
Date: 12/06/2025
Cours: L2 - Elec4A

Contrôle Terminal Session 2 – Traitement du Signal

Durée 2h00 – Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés. Une feuille manuscrite A4 recto-verso est autorisée. Cette épreuve continent 16 questions de valeur égale, dont 4 questions sont des bonus. Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules de rappel fournies en deuxième page.

• **Exercice 1** – *Circuits et filtrage en fréquence*

On considère le filtre analogique CR en série avec entrée comme la tension $x(t)$ et la sortie, la tension $v(t)$ aux bornes de la résistance R_1. Le condensateur a une capacité électrique C_1.

1.1 Utilisez la transformée de Fourier pour obtenir la fonction de transfert $T(f)$ de ce filtre ($\frac{V(f)}{X(f)}$).

1.2 Tracez la fonction de transfert en magnitude et discutez quel type de filtre il correspond.

1.3 Vérifiez mathématiquement à quel type de filtre correspond la fonction de transfert $T_2(f) = 1 - T(f)$. Quelles modifications dans la configuration du circuit précédant (avec les mêmes composants électriques) doit-on faire pour produire un circuit qui suit T_2 ?

• **Exercice 2** – *Représentation et analyse des signaux non périodiques*

Soit la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \max(0, \cos(x)), & \text{si } x \in [-\pi; \pi] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1 Tracez $f(x)$.

2.2 Calculer le spectre en fréquence de cette fonction. Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules en bas de page et l'intégration par parties $\int udv = uv - \int vdu$.

• **Exercice 3** – *Représentation et analyse des signaux périodiques*

Nous allons considérer un signal continu représenté par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ (étendue à $\mathbb{R}$ par périodicité). L'opérateur $|.|$ est le module, ou norme L_1, tel que pour un scalaire réel t :

$$|t| \quad = \quad \begin{cases} t, & \text{si } t \geq 0, \\ -t, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n \neq 0$, on note a_n le coefficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coefficient constant et b_n le coefficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier de f.

3.1 Tracez la forme du signal dans l'intervalle $x \in]-3\pi, 3\pi]$.

3.2 Étudiez la parité de f. Quelles sont les valeurs de b_n pour $n \geq 1$?

3.3 Calculer a_n pour les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$. Vous pouvez utiliser (si besoin) les formules en bas de page et l'intégration par parties $\int udv = uv - \int vdu$.

3.4 Calculer a_n pour n pair, soit $n = 2k$ et pour n impair, soit $n = 2k + 1$.

• **Exercice 4** – *Echantillonnage des signaux*

4.1 Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage que vous choisiriez pour échantillonner un signal, qui a une composante en fréquence maximale f_{max}, sans perte d'information dans sa version discrète ?

4.2 Soient $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ des scalaires, quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage pour le signal $s(t) = \sin(8\pi\sigma_1 t) + \cos(14\pi\sigma_2 t)$ pour éviter des pertes ?

4.3 Idem pour le signal $s(t) = \sin(16\pi\sigma_1 t)\cos(\sigma_2 t)$.

• **Exercice 5** – *Convolution discrète et transformée de Fourier à temps discret*

Soit le signal : $e[k] = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, \ldots\}$ pour $k \geq 0$.

5.1 Calculez la convolution discrète de ce signal $e[k]$ avec le signal défini par $h_1[.] = \{1, \underline{-2}, 1\}$.

5.2 Calculez la convolution discrète de ce signal $e[k]$ avec le signal défini par $h_2[.] = \{\underline{1}, 0, -1\}$.

5.3 Calculez la transformée de Fourier à temps discret de $e[k]$, $h_1[k]$ et $h_2[k]$ des items précédants.

5.4 Calculez le résultat de la convolution $(h_1 * e)[k]$ en fréquence en utilisant la représentation en fréquence des deux signaux.

Quelques rappels utiles :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \; ; \; \cos p - \cos q = -2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2}) \; ;$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b) \; ; \; 2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b) \; ;$$
$$a_0 = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\,dx \; ; \; a_n = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\cos(n\omega x)\,dx \text{ et } b_n = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\sin(n\omega x)\,dx, \text{ pour } n \geq 1;$$
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,e^{-i\omega x}\,dx; S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} s[k]\,e^{-i\omega k T_e}; s[k] = (h * e)[k] = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} h[j]e[k-j];$$
$$s(x) = (h * e)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e(x-u)\,du; \int udv = uv - \int vdu.$$

Bonne épreuve !