Université Bourgogne Europe
U.F.R. Sciences et Techniques
Licence Sciences Technologies Santé

Année : 2024 – 2025
Date : 20/05/2025
Cours : L2 - Elec4A

Contrôle Terminal – Traitement du Signal

Durée 2h00 – Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés. Une feuille manuscrite A4 recto-verso est autorisée. Cette épreuve contient 21 questions de valeur égale, dont 8 questions bonus. Vous pouvez utiliser les formules de rappel fournies en deuxième page.

• **Exercice 1** – *Questions génériques*

1.1 Vérifiez si les deux systèmes discrets suivants (avec entrée (e) et sortie (s)) sont des systèmes linéaires et invariants dans le temps: a) $s[k] = \sin(e[k])$ et b) $s[k] = (1 + 0.1(P[k] - P[0]))e[k]$ avec $P[k] = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, \ldots\}$, et $k \in \mathbb{N}$.

1.2 Quelle est la fréquence minimale d'échantillonnage que vous choisiriez pour échantillonner le signal, $s(t) = \sin(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_2 > f_1 > 0$, sans perte d'information dans sa version discrète ?

1.3 Un de vos collègues fait les deux affirmations suivantes la représentation spectrale avec Fourier pour un signal : 1) " La représentation spectrale est discrète quand le signal est continu et périodique "; et 2) " La représentation spectrale est invariante aux translations dans le domaine temporel ". Êtes-vous d'accord avec ces deux affirmations ?

• **Exercice 2** – *Convolution discrète et transformée de Fourier à temps discret*

Pour le signal discret : $e[k] = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\}$ pour $k \geq 0$:

2.1 Tracez la forme de ce signal.

2.2 Calculez la convolution discrète de ce signal $e[k]$ avec le signal défini par $h_1[.] = \{1, \underline{1}, 1\}/3$.

2.3 Calculez la convolution discrète de ce signal $e[k]$ avec le signal défini par $h_2[.] = \{1, \underline{0}, -1\}$.

2.4 Calculez la transformée de Fourier à temps discret de $e[k]$ et $h_2[k]$ de l'item précédant.

2.5 Calculez le résultat de la convolution $(h_2 * e)[k]$ en utilisant la représentation en fréquence des deux signaux.

• **Exercice 3** – *Représentation spectrale et convolution continue*

On considère la fonction triangle $T(t)$ et la fonction porte $\Pi(t)$ définies par

$$T(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \notin [-1, 1] \\ t, & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1 - t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{si } t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

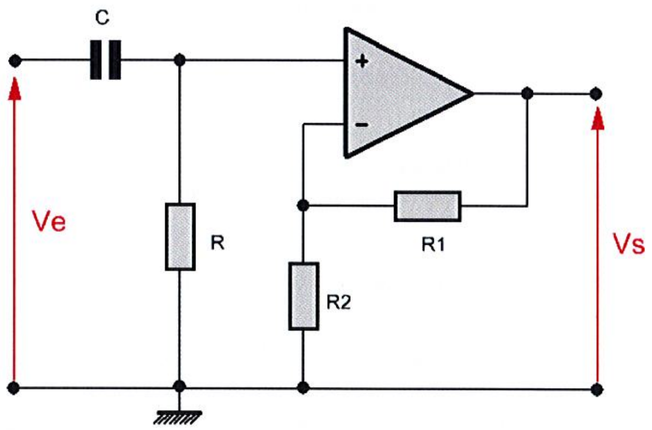
3.1 Tracez $T(t)$ et calculez sa transformée de Fourier en utilisant la définition.

3.2 Calculez la transformée de Fourier de $\Pi(t)$ en utilisant la définition. Tracez la magnitude de son spectre en fréquence. Quel type de filtre correspond sa fonction de transfert ?

3.3 Sachant que $T(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, en déduire une autre façon de calculer sa transformée de Fourier.

• **Exercice 4** – *Circuits et filtrage en fréquence*

Veuillez considérer le filtre actif d'un signal d'entrée $Ve(t)$, avec un amplificateur opérationnel idéal, que nous utiliserons pour amplifier le signal et, en même temps, enlever du bruit :



4.1 Utilisez la transformée de Fourier pour obtenir la fonction de transfert $T(f)$ de ce filtre ($\frac{Vs(f)}{Ve(f)}$). Indiquer vos assomptions et raisonnement pour la modélisation du circuit avec l'amplificateur opérationnel.

4.2 Tracez la fonction de transfert en magnitude et discutez quel type de filtre il correspond. Justifier en calculant mathématiquement les gains pour des signaux en basse fréquence ($\lim \omega = 2\pi f = 0$) et en haute fréquence ($\lim \omega = 2\pi f = +\infty$).

4.3 Vérifiez mathématiquement à quel type de filtre correspond la fonction de transfert $T_2(f) = 1 - T(f)$. Quelles modifications dans la configuration du circuit précédant (avec les mêmes composants électriques) doit-on faire pour produire un circuit qui suit T_2 ?

4.4 Considérez que l'entrée Ve peut être corrompue avec un bruit qui suit une densité en fréquence bleue ou rose. Indiquez quel de deux filtres, $T(f)$ ou $T_2(f)$, vous choisirez pour chacun de ces bruits.

• **Exercice 5** – *Représentation spectrale de fonctions périodiques*

Nous allons considérer un signal continu représenté par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x \sin x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ (étendue à $\mathbb{R}$ par périodicité). Pour $n \neq 1$, on note a_n le coefficient de $\cos(n\omega x)$, $a_0/2$ le coefficient de et b_n le coefficient de $\sin(n\omega x)$ dans la représentation de Fourier de f.

5.1 Tracez la forme du signal dans l'intervalle $x \in]-2\pi, 2\pi]$.

5.2 Étudiez la parité de f. Quelles sont les valeurs de b_n pour $n \geq 1$?

5.3 Calculez a_n pour le cas $n = 0$.

5.4 Calculez a_n pour les cas $n = 1$.

5.5 Calculez a_n pour $n \geq 2$.

5.6 En déduire la valeur de la somme $S = \Sigma_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2-1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{24} + \dots$

Quelques rappels utiles :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \ ; \ \cos p - \cos q = -2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2}) \ ;$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b) \ ; \ 2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b) \ ;$$
$$a_0 = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\,dx \ ; \ a_n = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\cos(n\omega x)\ dx \text{ et } b_n = \tfrac{2}{T}\int_T s(x)\sin(n\omega x)\,dx, \ \text{ pour } n \geq 1;$$
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\,e^{-i\omega x}\,dx; S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} s[k]\,e^{-i\omega kT_e}; s[k] = (h*e)[k] = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} h[j]e[k-j];$$
$$s(x) = (h*e)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e(x-u)\,du; \int u dv = uv - \int v du.$$

Bonne épreuve !