

Géométrie des courbes et des surfaces

Examen de rattrapage

— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.

La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée à une question devra être soigneusement justifiée.

Exercice 1. (Question de cours).

- (1) Définir les notions de branche infinie, de direction asymptotique et de droite asymptote pour une courbe paramétrée $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- (2) Montrer que si une courbe paramétrée $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admet une droite asymptote au voisinage d'une borne b de I , alors $\alpha(t)/\|\alpha(t)\|$ tend vers un vecteur directeur unitaire de cette droite lorsque $t \rightarrow b$.
- (3) Énoncer le théorème fondamental des courbes dans l'espace.
- (4) Énoncer le *Theorema Egregium* de Gauss.

Exercice 2. Dans cet exercice, on considère la fonction

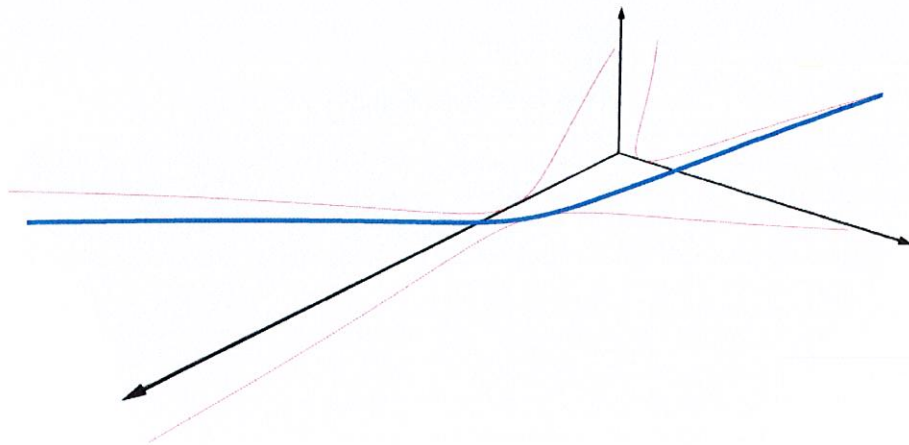
$$\beta :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta(t) := \frac{\sqrt{2}}{3} \left((1+t)^{3/2}, -(1-t)^{3/2} \right).$$

- (1) Montrer que β est une courbe paramétrée. De plus, prouver qu'elle est régulière et paramétrée par longueur d'arc.
- (2) En considérant des constantes a, b telles que $-1 < a < b < 1$, que vaut la longueur de β restreinte à l'intervalle $[a, b]$?
- (3) Calculer le repère de Frenet $\{T(t), N(t)\}$ au point $\beta(t)$, où $t \in]-1, 1[$.
- (4) Que vaut la courbure de β ?

Exercice 3. Dans cet exercice, on considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := \left(\frac{1}{2}t^2 + 2\sinh(t), t^2 - \sinh(t), t^2 \right).$$

Voici une représentation graphique, au voisinage de $t = 0$, de cette courbe avec ses projections sur les 3 plans de coordonnées :

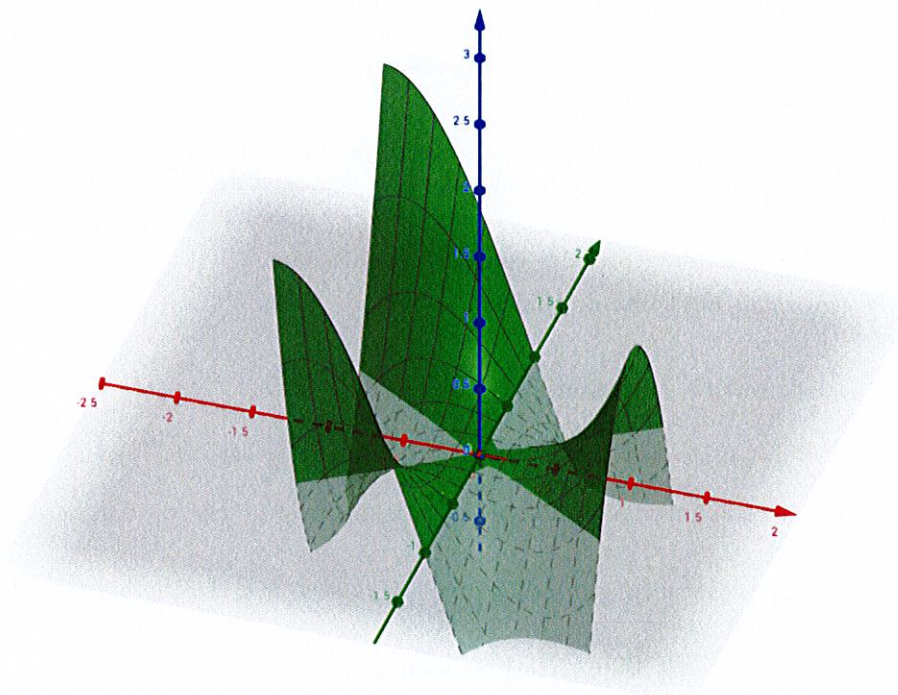


- (1) Montrer que la courbe γ est régulière.
- (2) Montrer que la courbe γ est birégulière et calculer en, tout point, son repère de Frenet.
- (3) Puisque le vecteur binormal est constant, dans quel type de surface la courbe γ est-elle incluse ?
Ecrire explicitement une équation cartésienne de la surface en question.
- (4) Calculer la courbure et la torsion de γ .

Exercice 4. La *selle de singe* est le support S de la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u, v) := (u, v, u^3 - 3uv^2);$$

elle est dessinée ci-dessous dans un voisinage de $\varphi(0, 0) = (0, 0, 0)$:



Pour un point $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on note $p := \varphi(r, s) \in S$ et

$$f := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(r, s), \quad g := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(r, s).$$

- (1) Montrer que S est une surface régulière (i.e. une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2).
- (2) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_p S}$.
- (3) Que vaut l'application de Gauss induite par φ au point p ?
- (4) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_p S}$.
- (5) Calculer la courbure de Gauss K_p de S en p .
- (6) Montrer que S admet $o = (0, 0, 0)$ pour unique point parabolique.
De plus, a-t-on que le point o est planaire ?

