Géométrie des courbes et des surfaces

Examen final

— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.

La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée à une question devra être soigneusement justifiée.

Exercice 1. (1) (Question de cours). Enoncer le *Theorema Egregium* de Gauss.

Pour la suite, soit une surface régulière $S \subset \mathbb{R}^3$ avec (U, φ) une carte locale de coordonnées (u, v). On écrira φ_u, φ_v pour les dérivées partielles de φ par rapport à u et v ; on adoptera des notations similaires pour les dérivées secondes, etc.
On considère les décompositions (vues comme fonctions de (u, v))

$$\varphi_{uu} := \Gamma^u_{uu}\varphi_u + \Gamma^v_{uu}\varphi_v + L\,\eta, \quad \varphi_{uv} := \Gamma^u_{uv}\varphi_u + \Gamma^v_{uv}\varphi_v + M\,\eta, \quad \varphi_{vv} := \Gamma^u_{vv}\varphi_u + \Gamma^v_{vv}\varphi_v + N\eta,$$

où L, M, N sont les composantes de la seconde forme fondamentale, et η est l'application de Gauss sur U induite par φ.

(2) (Question de cours). Montrer explicitement que les symboles de Christoffel Γ^k_{ij} s'écrivent en terme de la première forme fondamentale et de ses dérivées.

Une carte locale est dite *munie de coordonnées géodésiques* lorsque les éléments de la première forme fondamentale sont donnés par $E = 1$, $F = 0$ et $G = G(u, v)$, avec $G : U \to \mathbb{R}^*_+$ une fonction lisse.

(3) En adaptant votre réponse à la partie (2), écrire les symboles de Christoffel dans le cas d'une carte locale munie de coordonnées géodésiques.
Parmi ces symboles, lesquels sont non-nuls ?

(4) On considère la carte locale suivante sur la sphère de rayon 1 :

$$\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(u, v) = \big(\cos(u)\,\cos(v)\,,\,\cos(u)\,\sin(v)\,,\,\sin(u)\big)\,.$$

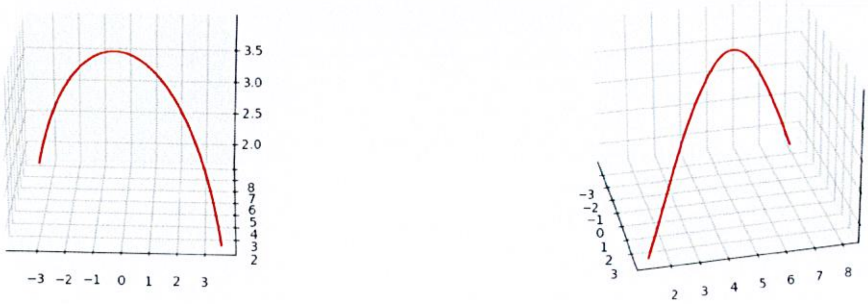
Montrer qu'elle est munie de coordonnées géodésiques.

Exercice 2. (1) (Question de cours). Enoncer et démontrer le théorème de Lancret.

Pour la suite de l'exercice, on considère la courbe paramétrée

$$\beta :]-1, 1[\to \mathbb{R}^3, \qquad \beta(t) := \big(4t\,,\,3\arccos(t)\,,\,4\sqrt{1-t^2}\big).$$

Voici une représentation graphique de cette courbe vue sous deux angles différents :



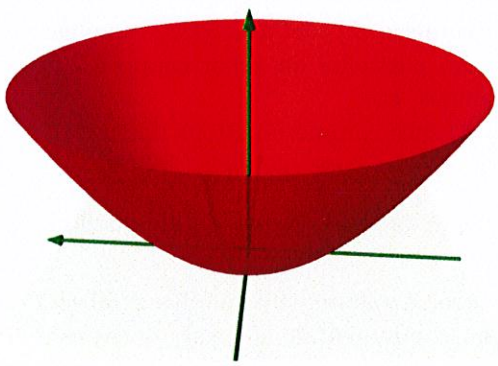
(2) Montrer que la courbe est birégulière et calculer en, tout point, son repère de Frenet.
De plus, déduire de ces calculs la courbure et la torsion de β.
[*Si vous avez oublié la dérivée de l'arccosinus, rappelez-vous que* $\cos(\arccos(t)) = t$ *sur* $]-1,1[$.]

(3) La courbe β définit-elle une hélice ? Si c'est le cas, trouver un vecteur unitaire avec lequel chaque vecteur tangent de β forme un angle constant.

Exercice 3 (Étude d'une surface).
Soit $a > 0$ une constante fixée. On considère la nappe paramétrée

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(u,v) := \big(a\,u\,\cos(v)\,,\, a\,u\,\sin(v)\,,\, u^2\,\big),$$

Son support $S := \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est représenté ci-dessous partiellement, pour $a = 2$:



(1) (a) Est-ce que S est une surface de révolution ? Si c'est le cas, en donner une génératrice.
(b) Montrer que S est une quadrique en exhibant son équation cartésienne.

(2) Calculer $\left\| \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\|$, et déterminer (s'il en existe) les points singuliers de la nappe paramétrée φ.
Le support S est-il une surface régulière ?

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe un point $(r,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *qu'on suppose régulier pour* φ.
On note $p := \varphi(r,s)$ et $f := \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(r,s)$, $g := \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(r,s)$.

(3) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(4) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale I_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(5) Déduire des calculs précédents la courbure de Gauss et la courbure moyenne au point p.
Quel est le type de ce point ?
La surface est-elle minimale ?