

Info3Ba, 2024-2025, Synthèse d'Images

Temps : 1 heure

Lundi 16 décembre 2024

Ne rendre que la page 7

Document autorisé : 1 feuille **A4** recto-verso manuscrite.

Machine à calculer, téléphone et autres sont interdits.

Il sera tenu compte de la clarté des explications et de la rigueur dans les démonstrations. Les abréviations et le langage **SMS** provoquent des bugs chez le correcteur.

On se place dans l'espace affine $\mathcal{E}_3$ de dimension 3 muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

♥ Théorème 1 : Rappel

Soit γ une courbe de Bézier polynomiale de degré n de points de contrôle $(P_i)_{i \in [0:n]}$.

Le vecteur vitesse à γ au point $\gamma(0) = P_0$ est :

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) = n \overrightarrow{P_0 P_1}$$

Le vecteur vitesse à γ au point $\gamma(1) = P_n$ est :

$$\frac{d\gamma}{dt}(1) = n \overrightarrow{P_{n-1} P_n}$$

Notation 1 : Orientation d'un plan pour les arbres C.S.G.

Le vecteur normal définissant l'orientation du plan d'équation :

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

est $\vec{N}(a; b; c)$ et non pas $\vec{N}_1(-a; -b; -c)$.

Exercice 1.

Soit γ_0 une courbe de Bézier polynomiale de degré 2 de points de contrôle P_0, P_1 et P_2 .

Soit γ_1 une courbe de Bézier polynomiale de degré 3 de points de contrôle Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3 .

1. Donner une condition sur les points de contrôle pour que les courbes γ_0 et γ_1 réalisent une jointure G^0 aux points $\gamma_0(1)$ et $\gamma_1(0)$.
2. Donner une condition sur les points de contrôle pour que les courbes γ_0 et γ_1 réalisent une jointure G^1 aux points $\gamma_0(1)$ et $\gamma_1(0)$.
3. Donner une condition sur les points de contrôle pour que les courbes γ_0 et γ_1 réalisent une jointure G^1 et C^1 (le vecteurs vitesse sont égaux) aux points $\gamma_0(1)$ et $\gamma_1(0)$.

Exercice 2. Le but de l'exercice est la création d'un œuf troué, figure 1, composé à partir :

- > du tore $\mathcal{T}$, d'axe vertical $(O; \vec{k})$, de centre $O_1(0; 0; -2)$, de rayon majeur R et de rayon mineur r ;
- > du cylindre $\mathcal{C}$, sans fond et sans couvercle, d'une hauteur $h = 4$, de rayon $r_{\mathcal{C}}$, d'axe $(O; \vec{k})$, délimité en bas par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = -2$;
- > d'une « calotte sphérique » $\mathcal{S}$ centrée en $O_2(0; 0; 2)$, de rayon $r_{\mathcal{S}}$ délimitée par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $z = 2$ et $z = \frac{5}{2}$;
- > du cylindre $\mathcal{C}_2$ de rayon $r_2 = \frac{A_2 B_2}{2}$, d'axe $(O; \vec{k})$, délimité par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$;

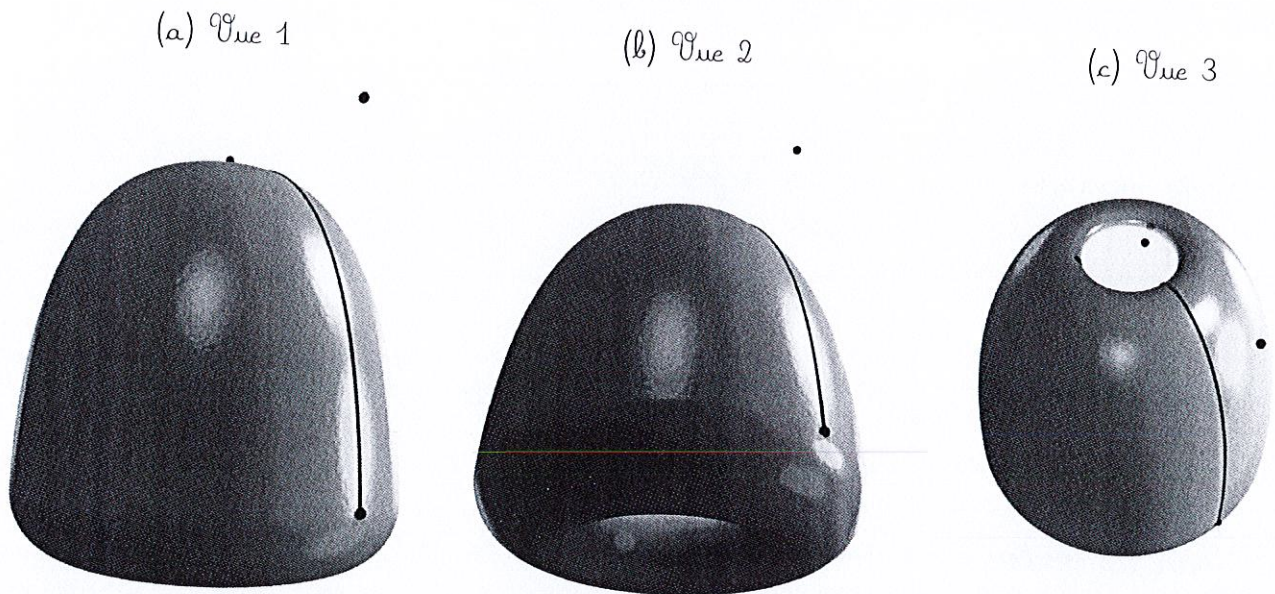


Figure 1 - L'œuf troué, trois vues.

- > d'une surface de révolution $\mathcal{L}$ définie par une courbe de Bézier cubique de points de contrôle A_2 , P_1 , P_2 et A_3 .

Un schéma de la construction dans le plan d'équation $y = 0$ est donné par la figure 3.

Question 1. : Le tore, figure 3.

1. Déterminer les expressions des rayons mineur r et majeur R en fonction des points de la figure 3. Application numérique : donner les valeurs de r et R .
2. (a) En utilisant un des vecteurs de la base, quel calcul vectoriel permet de récupérer la cote de O_1 ?
(b) Déterminer, en fonction de R , r et des coordonnées de O_1 , les coordonnées de A_0 , B_0 et A_3 .

Question 2. : Le cylindre $\mathcal{C}$, figure 3.

Exprimer, en fonction de R , r et éventuellement des coordonnées de O_1 , le rayon $r_{\mathcal{C}}$ du cylindre $\mathcal{C}$.

Question 3. : Construction de la « calotte sphérique » $\mathcal{S}$.

1. Préciser la valeur du rayon $r_{\mathcal{S}}$ de la sphère $\mathcal{S}$;
2. Dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{k})$, orienté de façon canonique, calculer :

$$(\widehat{O_2A_1; O_2A_2})$$

3. Calculer, en fonction des autres variables déjà définies, le rayon $r_2 = \frac{A_2B_2}{2}$. La distance du point O_2 à la droite (A_2B_2) est $\frac{1}{2}r_{\mathcal{S}}$;
4. Donner les vecteurs normaux unitaires aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$;
5. La calotte sphérique est la sphère $\mathcal{S}$, délimitée par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, figure 2(a), et creusée par le cylindre $\mathcal{C}_2$, figure 2(b).
Sans modifier les équations des plans, écrire l'arbre (binaire) C.S.G. permettant d'obtenir la « calotte sphérique » $\mathcal{S}$. (Il est possible d'utiliser la notation 1)

Question 4. : La surface de révolution $\mathcal{L}$.

Le premier (resp. dernier) point de contrôle de la courbe de Bézier cubique γ est A_2 (resp. A_3).

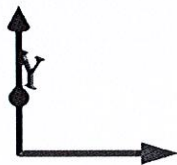
1. Jointure G^1 en A_2 entre le cercle de centre O_2 et de rayon $r_{\mathcal{S}}$ et la courbe de Bézier cubique γ .
 - (a) Sur la figure 3, tracer (en expliquant) l'objet géométrique Δ (droite, cercle...) où doit se trouver P_1 , deuxième point de contrôle de la courbe de Bézier cubique γ ;
 - (b) Donner une équation vectorielle, commune au plan et à l'espace, permettant de construire le point P_1 sur la droite Δ ;
 - (c) Donner une inéquation vectorielle pour que le point P_1 appartienne à Δ tel que la cote de P_1 soit supérieur à celle de A_2 ;
 - (d) Placer une possibilité pour P_1 sur Δ .
2. Jointure G^1 en A_3 entre le cercle de diamètre $[A_0A_3]$ et la courbe de Bézier cubique γ . Dans le plan d'équation $y = 0$, le point P_2 appartient à la tangente au tore T en A_3 et a la même cote que le point P_1 .

- (a) Comparer les directions et les sens des vecteurs $\overrightarrow{A_3P_2}$ et $\vec{k}$;
- (b) Donner une formulation, commune au plan et à l'espace, permettant de construire P_2 à partir du point A_3 et du vecteur $\vec{k}$;
- (c) Tracer P_2 sur la figure 3 ;
- (d) Distinction obligatoire du cas du plan et du cas de l'espace pour traduire la réponse de la question 2b. Il est possible de considérer le membre de gauche de l'équation suivante :

$$\dots = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}; \vec{v})|$$

- i. Donner une formulation vectorielle, valable seulement dans le plan $(\vec{i}; \vec{k})$, permettant de construire P_2 à partir du point A_3 et du vecteur $\vec{k}$;
- ii. Donner une formulation vectorielle, valable seulement dans $\vec{E}_3$, permettant de construire P_2 à partir du point A_3 et du vecteur $\vec{k}$.

(a) Délimitation de la calotte par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$



(b) Calotte creusée par le cylindre $\mathcal{C}_2$



Figure 2 - L'œuf troué, construction de la « calotte sphérique », question 3 _____

Schéma de la construction qu'il est possible de rendre avec la copie.

Numéro d'anonymat :

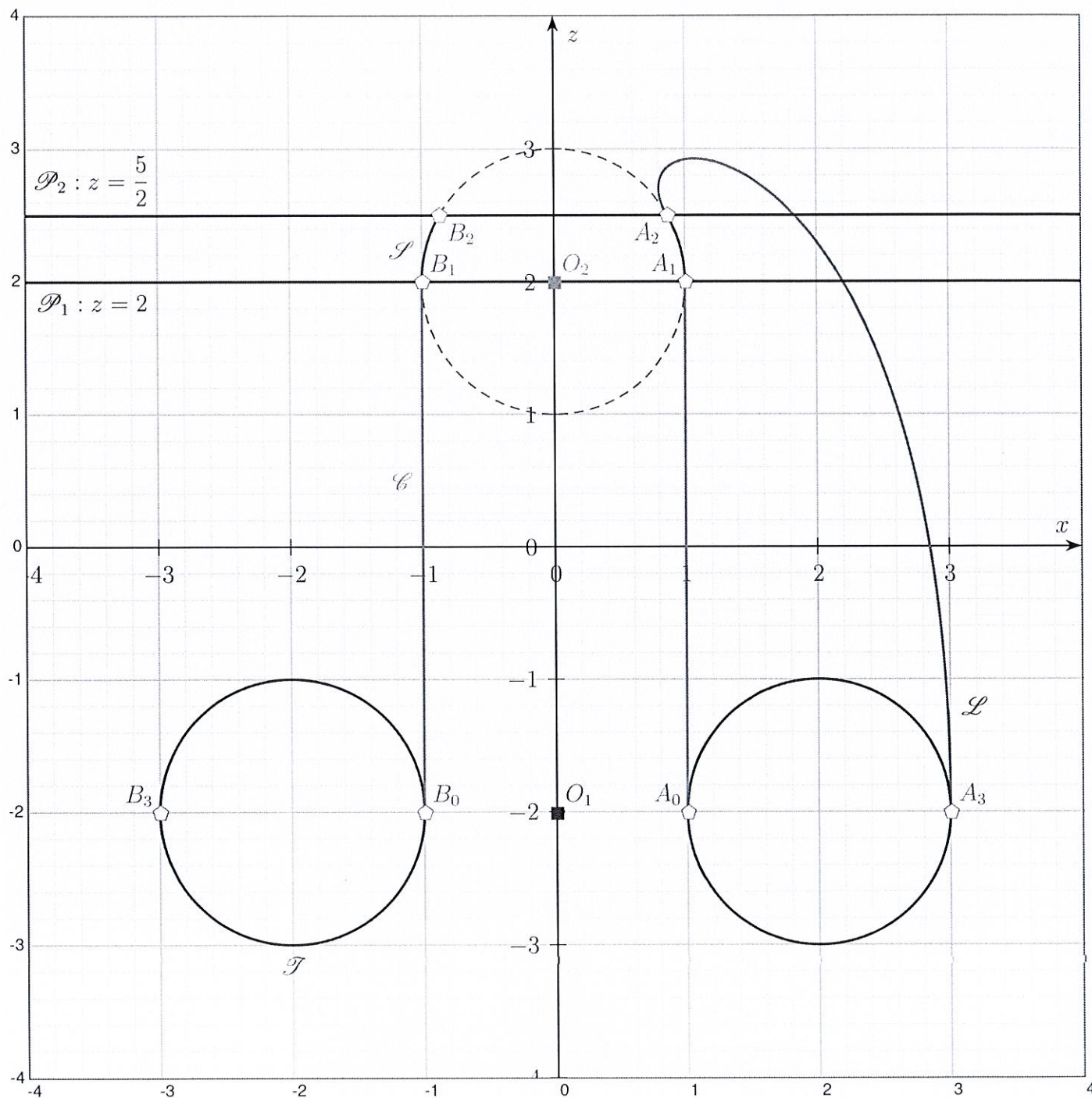


Figure 3 - Coupe, dans le plan d'équation $y = 0$, permettant la construction de l'œuf de la figure 1.