

Session 2 - Licence 2 - Info4C - Durée 2H

Université Bourgogne Europe - 2024-2025

Tous les documents sont autorisés

Partie I (10pts)

Exercice 1 : (4 pt)

A. Trouver la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$\begin{aligned} \bullet a_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 25 \cdot a_{n-2} & \text{si } n \geq 2. \end{cases} \\ \bullet b_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n = 2 \\ b_{n-1} + 25 \cdot b_{n-2} - 25 \cdot b_{n-3} & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

B. Exprimer les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ sous une forme simplifiée.

C. Quelle relation existe entre la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2 : (2 pt) Trouver la forme close et la fonction génératrice pour la suite :

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4 \cdot c_{n-1} + 2^n & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 3 : (2 pt) Un caissier veut travailler 5 jours par semaine mais il veut garder au moins le samedi ou le dimanche libre. Combien de possibilités aura-t-il comme choix ?

Exercice 4 : (2 pt) Donner le nombre de fonctions $f : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ ayant la propriété suivante : $f(i) \leq f(j)$ pour tout i et j , $0 \leq i < j \leq k$, dans les deux cas suivants :

A. $k = 4$ et $n = 1$;

B. $k = 6$ et $n = 7$.

Partie II (10pts)

Exercice 5 : (3 pts) Dessiner le diagramme de Hasse de l'ensemble des diviseurs (entiers positifs) de 112 muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par :

$$a \leq b \Leftrightarrow b \text{ est multiple de } a.$$

Est-ce un treillis ? Est-ce un treillis distributif ? Est-ce un treillis complété ? (argumentez toutes vos réponses).

Exercice 6 : (3 pts) Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. On définit sur $\mathbb{N}$ la relation binaire suivante :

$$x \mathcal{R} y \text{ si et seulement si } x < y \text{ ou } x = 2y.$$

La relation est-elle réflexive ? transitive ? symétrique ? antisymétrique ?

Exercice 7 : (1 pts) Si $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs ou nuls, on considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$ définie par :

$$xRy \Leftrightarrow 8 \text{ divise } y - x.$$

Décrire l'ensemble quotient.

Exercice 8 : (3pts) En utilisant le tableau de Karnaugh, donner la forme disjonctive de la fonction booléenne d'arité quatre suivante :

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a} \vee \bar{c}) \wedge (b \vee \bar{d}).$$