

Session 1 - Licence 2 - Info4C - Durée 2H

Université de Bourgogne - 2024-2025

Tous les documents sont autorisés

Partie I (8pts)

Exercice 1 : (3 pts)

A. Trouver la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$\begin{aligned} \bullet a_n &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 1 \\ a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} & \text{si } n \geq 2. \end{cases} \\ \bullet b_n &= \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n = 1 \\ 2 & \text{si } n = 2 \\ 3 \cdot b_{n-2} + 2 \cdot b_{n-3} & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

B. Quelle relation existe entre la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2 : (3 pts) Trouver la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 3 \cdot c_{n-1} - 1 & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \quad d_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2 \cdot d_{n-1} + 3^n & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 3 : (2 pts) Combien de mots ternaires sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ ne contiennent pas deux chiffres pairs consécutifs ?

Partie II (12pts)

Exercice 4 : (3 pts) Dessiner le diagramme de Hasse de l'ensemble des diviseurs (entiers positifs) de 60 muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par:

$$a \leq b \Leftrightarrow b \text{ est multiple de } a.$$

Est-ce un treillis ? Est-ce un treillis distributif ? Est-ce un treillis complémenté ? (argumentez toutes vos réponses).

Exercice 5 : (4 pts) Soit B_3 l'ensemble des mots de longueur 3 constitués de 0 et de 1. On définit sur B_3 la relation binaire suivante: $abc \mathcal{R} def$ si et seulement si au moins deux des inégalités suivantes sont vraies: $a \leq d, b \leq e, c \leq f$. On a par exemple, $100 \mathcal{R} 011$; par contre, on n'a pas $011 \mathcal{R} 100$.

1) La relation est-elle réflexive? transitive? symétrique? antisymétrique?

2) Donnez tous les couples d'éléments qui ne sont pas en relation.

Exercice 6 : (2 pts) Si N est l'ensemble des entiers positifs ou nuls, on considère la relation d'équivalence sur N^2 définie par:

$$xRy \iff 7 \text{ divise } y - x.$$

Décrire l'ensemble quotient.

Exercice 7 : (3pts) En utilisant le tableau de Karnaugh, donner la forme disjonctive de la fonction booléenne d'arité quatre suivante:

$$f(a, b, c, d) = (a \vee \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{d}).$$