

Mathématiques pour l'informatique et l'électronique, MaIE1A

Session 2

23 Juin 2025 / 13 h 30 — 15 h 30, hors tiers temps

Tout document autre que ceux distribués pendant l'épreuve n'est pas autorisé. Les téléphones portables et autres moyens de communication sont interdits. Les surveillants donneront les conditions d'usage des calculettes personnelles.

Chaque étudiant dispose sur sa table du matériel adéquat, y compris la carte d'étudiant, dès le début de l'épreuve. Aucun échange entre étudiants ne sera toléré une fois le sujet distribué.

La qualité de la rédaction ainsi que la présentation entrent pour une part significative dans l'évaluation des copies. *Tous les résultats doivent être suffisamment justifiés* : on devra employer « on a », « on suppose » ou « on veut ».

Sur la copie principale figure une case où l'étudiant renseigne le nombre d'intercalaires utilisés. Si elle n'est pas remplie, cela signifie qu'il n'y en a aucun.

Il ne sera distribué qu'un seul énoncé par étudiant.

1. Nombres complexes

1.1. calculer $1 + i^9 + i + i^8 + i^2 + i^7 + i^3 + i^6 + i^4 + i^5$?

Solution : —

On a $i^2 = -1$ donc

$$\begin{aligned} 1 + i^9 + i + i^8 + i^2 + i^7 + i^3 + i^6 + i^4 + i^5 &= 1 + i + i + 1 - 1 + -i - i - 1 + 1 + i \\ &= 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + i + i - i - i + i \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

1.2. Mettre $1 + i$ sous forme trigonométrique.

Solution : —

$$\text{On a } 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

2. Variation des fonctions

2.1. Que signifie f est croissante sur $\mathbb{R}$? On donnera une réponse en langage mathématique et une réponse en langage courant.

Solution :

En langage mathématique, cela signifie $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
En langage courant, cela signifie que si on augmente l'argument alors on augmente son image par la fonction.

2.2. Est-ce que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}$?

Solution :

Non car on a $-1 < 0$ et $(-1)^2 > 0^2$.

2.3. Quelle est la dérivée de $x \mapsto -1/x$? Quel est son signe ?

Solution :

La dérivée de $x \mapsto -1/x$ est $x \mapsto 1/x^2$. Elle est positive.

2.4. Est-ce que la fonction $x \mapsto -1/x$ est croissante sur $\mathbb{R}^*$?

Solution :

Non car on a $-1 < 1$ et $-1/-1 > -1/1$.

2.5. Déterminer l'ensemble de définition maximal ainsi que le sens de variation de la fonction réelle $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Solution :

Pour tout nombre x , on a $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$, donc $\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ est toujours bien défini : l'ensemble de définition cherché est $\mathbb{R}$. La dérivée de cette fonction est $x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, elle est positive sur $]1; +\infty[$ et négative sur $] -\infty; 1[$. La fonction est décroissante sur $] -\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

3. Théorème des accroissements finis

3.1. Recopier l'énoncé suivant du théorème des accroissements finis en remplaçant les trois « $\langle \dots \rangle$ » par le texte approprié.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $\langle \dots \rangle$, avec $a < b$. Il existe c de $\langle \dots \rangle$ tel que $\langle \dots \rangle = f'(c)$.

Solution :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$, avec $a < b$. Il existe c de $]a; b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

3.2. Ici $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x^2 - 2x + 2$.

3.2.1. Si possible, appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[1;3]$ et trouver les valeurs exactes du c .

Solution :

On a

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{(3^2-2\times 3+2)-(1^2-2\times 1+2)}{2} = \frac{5-1}{2} = 2.$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'appliquer le théorème des accroissements finis, avec $f'(x) = 2x - 2$. Cela donne $f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2x - 2 = 2 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. Finalement $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = f'(2)$ et la seule possibilité est $c = 2$.

4. Intégration

4.1. Calculer $\int_{x=1}^2 x^2 - 2x + 2 \, dx$.

Solution :

On a

$$\int_{x=1}^2 x^2 - 2x + 2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{x=1}^2 = \frac{2^3 - 1^3}{3} - 2 \frac{2^2 - 1^2}{2} + 2(2 - 1) = \frac{7}{3} - 3 + 2 = \frac{4}{3}$$

4.2. Calculer : $\int_{t=0}^1 3^{2t} 2^{3t} \, dt$

Solution :

On a

$$3^{2t} 2^{3t} = 9^t 8^t = 72^t = e^{t \ln 72}$$

d'où

$$\int_{t=0}^1 3^{2t} 2^{3t} \, dt = \int_{t=0}^1 e^{t \ln 72} \, dt = \left[\frac{e^{t \ln 72}}{\ln 72} \right]_{t=0}^1 = \frac{e^{\ln 72} - 1}{\ln 72} = \frac{72 - 1}{\ln 72} = \frac{71}{\ln 72}$$

4.3. Avec la formule d'Euler

4.3.1. Rappeler la formule d'Euler $\cos(x) = \frac{e^{ix} \langle \dots \rangle}{\langle \dots \rangle}$.

Solution :

On a pour tout x , $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

4.3.2. Calculer avec les formules usuelles $\int_{x=0}^{\pi} e^{(1+i)x} \, dx$ et $\int_{x=0}^{\pi} e^{(1-i)x} \, dx$.

Solution :

On a

$$\int_{x=0}^{\pi} e^{(1+i)x} \, dx = \left[\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} \right]_{x=0}^{\pi} = \frac{e^{(1+i)\pi} - 1}{1+i} = -\frac{e^{\pi} + 1}{1+i}$$

et

$$\int_{x=0}^{\pi} e^{(1-i)x} \, dx = \left[\frac{e^{(1-i)x}}{1-i} \right]_{x=0}^{\pi} = \frac{e^{(1-i)\pi} - 1}{1-i} = -\frac{e^{\pi} + 1}{1-i}$$

4.3.3. En déduire $\int_{x=0}^{\pi} e^x \cos x \, dx$.

Solution :

Avec la formule d'Euler, on a

$$e^x \cos x = e^x \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^x e^{ix} + e^x e^{-ix}}{2} = \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2}$$

d'où

$$\int_{x=0}^{\pi} e^x \cos x \, dx = \int_{x=0}^{\pi} \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi} e^{(1+i)x} \, dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi} e^{(1-i)x} \, dx$$

et

$$\int_{x=0}^{\pi} e^x \cos x \, dx = -\frac{1}{2} \frac{e^{\pi} + 1}{1+i} - \frac{1}{2} \frac{e^{\pi} + 1}{1-i} = -\frac{e^{\pi} + 1}{2} \times \frac{1-i+1+i}{1^2 - i^2} = -\frac{e^{\pi} + 1}{2}$$

5. Formes indéterminées

5.1. Énoncer la règle de l'Hôpital.

Solution :

a et ℓ désignent des nombres, $-\infty$ ou $+\infty$,

$$\lim_a f = 0 \text{ et } \lim_a g = 0 \text{ et } \lim_a \frac{f'}{g'} = \ell \implies \lim_a \frac{f}{g} = \ell$$

$$\lim_a f = \infty \text{ et } \lim_a g = \infty \text{ et } \lim_a \frac{f'}{g'} = \ell \implies \lim_a \frac{f}{g} = \ell$$

5.2. Application : Donner si elle existe la valeur de $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

On a

- $\sin(n\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$ et $\sin(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$,
- $\sin(n\theta)' = n \cos(n\theta)$ donc $\sin(n\theta)' \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} n$,
- $\sin(\theta)' = \cos(\theta)$ donc $\sin(\theta)' \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 1$.
- $\frac{\sin(n\theta)'}{\sin(\theta)'} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} n$.

Au total, on applique la règle de l'Hôpital pour obtenir $\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} n$

5.3. Application : Donner si elle existe la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

Solution :

On a,

- $1 - \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $x \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,
- $(1 - \cos x)' = \sin x$ donc $(1 - \cos x)' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
- $(1 - \cos x)'' = \cos x$ donc $(1 - \cos x)'' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.
- $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ donc $(x \sin x)' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,
- $(x \sin x)'' = 2 \cos x - x \sin x$ donc $(x \sin x)'' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$,

Au total, on applique deux fois la règle de l'Hôpital : $\frac{(1 - \cos x)''}{(x \sin x)''} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$,

$$\frac{(1 - \cos x)'}{(x \sin x)'} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

6. Équations différentielles ordinaires

6.1. Soit (E) $y'' - 4y' + 3y = 0$

6.1.1. Quelles sont les solutions de la forme e^{rx} où r est un nombre ?

Solution :

Si e^{rx} est solution de (E) alors

$$e^{rx''} - 4e^{rx'} + 3e^{rx} = r^2 e^{rx} - 4r e^{rx} + 3e^{rx} = (r^2 - 4r + 3)e^{rx} = 0$$

Comme l'exponentielle n'est pas nulle, cela donne $r^2 - 4r + 3 = 0$. Donc r vaut 1 ou 3. Réciproquement, pour $r = 1$ on a

$$(e^x)'' - 4(e^x)' + 3e^x = e^x - 4e^x + 3e^x = 0$$

et pour $r = 3$ on a

$$(e^{3x})'' - 4(e^{3x})' + 3e^{3x} = 9e^{3x} - 12e^{3x} + 3e^{3x} = 0$$

6.1.2. En déduire toutes les solutions de (E)

Solution :

Les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = k_1 e^x + k_3 e^{3x}$ où k_1 et k_3 sont des constantes.

6.1.3. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$.

Solution :

On détermine k_1 et k_3 tels que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. Cela donne

$$y(0) = 2 = k_1 e^0 + k_3 e^{3 \times 0} = k_1 + k_3$$

et comme $y'(x) = k_1 e^x + 3 k_3 e^{3x}$

$$y'(0) = 3 = k_1 e^0 + 3 k_3 e^{3 \times 0} = k_1 + 3 k_3$$

On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 2 = k_1 + k_3 \\ 3 = k_1 + 3 k_3 \end{cases}$$

dont la solution est $k_1 = k_3 = 1$. La solution cherchée est donc $e^x + e^{3x}$.

6.2. Soit (E) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

6.2.1. Quelles sont les solutions de la forme e^{rx} où r est un nombre ?

Solution :

Si e^{rx} est solution de (E) alors

$$(e^{rx})'' - 4(e^{rx})' + 4e^{rx} = r^2 e^{rx} - 4r e^{rx} + 4e^{rx} = (r - 2)^2 e^{rx} = 0$$

Comme l'exponentielle n'est pas nulle, cela donne $(r - 2)^2 = 0$. Donc r vaut 2. Réciproquement, on a

$$(e^{2x})'' - 4(e^{2x})' + 4e^{2x} = 4e^{2x} - 8e^{2x} + 4e^{2x} = 0$$

6.2.2. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution :

Les solutions de (E) sont donc de la forme $(k_1 + x l_1) e^{2x}$ où k_1 et l_1 sont des nombres.

6.2.3. Si y est une solution de (E), de quelle équation proche de (E) la fonction $y + 2025$ est elle une solution ?

Solution :

Si y est solution de (E) on a $y'' - 4y' + 4y = 0$. De plus on a

$$(y + 2025)'' - 4(y + 2025)' + 4(y + 2025) = y'' - 4y' + 4y + 4 \cdot 2025 \\ = 8100$$

Donc $y + 2025$ est solution de $z'' - 4z' + 4z = 8100$

6.2.4. En déduire toutes les solutions de (E') $y'' - 4y' + 4y = 4$.

Solution :

Pour tout nombre C , on a

$$(y + C)'' + 4(y + C)' + 4(y + C) = y'' + 4y' + 4y + 4C$$

donc y est solution de (E) si et seulement si $y + C$ est solution de $z'' + 4z' + 4z = 4C$. Pour $C = 1$ on obtient le résultat. Les solutions de (E') sont de la forme $(k_1 + x l_1) e^{-2x} + 1$ où k_1 et l_1 sont des nombres.