

Mathématiques pour l'informatique et l'électronique, MaIE1A

Contrôle terminal

9 janvier 2025 / 8 h — 10 h, hors tiers temps

Tout document autre que ceux distribués pendant l'épreuve n'est pas autorisé. Les téléphones portables et autres moyens de communication ne sont pas autorisés. Les surveillants indiqueront quand les calculettes personnelles sont autorisées.

Chaque étudiant dispose sur sa table du matériel adéquat, y compris la carte d'étudiant, dès le début de l'épreuve. Aucun échange entre étudiants ne sera toléré une fois le sujet distribué.

La qualité de la rédaction ainsi que la présentation entrent pour une part significative dans l'évaluation des copies. *Tous les résultats doivent être suffisamment justifiés* : on devra employer « on a », « on suppose » ou « on veut ».

Sur la copie principale figure une case où l'étudiant renseigne le nombre d'intercalaires utilisés. Si elle n'est pas remplie, cela signifie qu'il n'y a aucun.

Il ne sera distribué qu'un seul énoncé par étudiant.

1. Fonctions

1.1. Donner l'ensemble de définition maximal de $\sqrt{x^2 + 2x - 5}$.

Solution :

Les deux racines de $x^2 + 2x - 5$ sont $-1 - \sqrt{6}$ et $-1 + \sqrt{6}$. On a

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{6}$	$-1 + \sqrt{6}$	$+\infty$
$x + 1 + \sqrt{6}$	-	0	+	+
$x + 1 - \sqrt{6}$	-	-	0	+
$x^2 + 2x - 5$	+	0	-	+

L'ensemble cherché est $] -\infty; -1 - \sqrt{6}] \cup [-1 + \sqrt{6}; +\infty[$

1.2. Calculer la dérivée de $x \ln x$. En déduire la primitive de $\ln x$ qui s'annule en 1.

Solution :

On a

$$(x \ln x)' = x' \ln x + x \ln' x = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

et

$$(x \ln x)' = \ln x + x'$$

$$(x \ln x - x)' = (x \ln x)' - x' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

d'où $x \ln x - x$ est une primitive de $\ln x$. Pour finir, $x \ln x - x + 1$ la primitive de $\ln x$ qui s'annule en 1.

1.3. Soit $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \sin x$. Calculer f' , f'' .

Solution :

On a

$$(x \sin x)' = x' \sin x + x \sin' x = \sin x + x \cos x$$

et

$$(x \sin x)'' = (\sin x + x \cos x)' = \cos x + x' \cos x + x \cos' x = 2 \cos x - x \sin x$$

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $P(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$.

2.1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a; b]$.

Solution :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$.

2.2. Évaluer $P(0)$ et $P(-1)$ sans utiliser la calculatrice.

Solution :

$$P(0) = 1, P(-1) = 1 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 = -2,$$

2.3. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une solution réelle.

Solution :

On a $P(-1) < 0$ et $P(0) > 0$. Comme P est continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une racine réelle.

2.4. Quel est le signe de $P(x)$ lorsque x est positif ou nul? En déduire que toutes les solutions réelles de $P(x) = 0$ sont négatives.

Solution :

Pour $x \geq 0$, on a

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 \geq 1 > 0$$

et $P(x) \neq 0$. Aucune solution de $P(x) \neq 0$ ne vérifie $x \geq 0$, donc toutes vérifient $x < 0$.

2.5. En déduire un encadrement de la plus grande racine réelle de P .

Solution :

Une des racines réelles de P se trouve dans $]-1;0[$. La plus grande lui est supérieure, donc elle est supérieure à -1 . Étant négative, la plus grande racine est dans $]-1;0[$.

3. Théorème des accroissements finis

Soit $f(x) = e^x$.

3.1. Énoncer le théorème des accroissements finis sur $[a; b]$.

Solution :

Si f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, alors on a

$$\exists c \in]a; b[, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

3.2. Peut-on appliquer ce théorème à f sur $[0; t]$?

Solution :

f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; t]$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0; t[$. On peut appliquer le théorème.

3.3. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $e^t - 1 \leq t e^t$.

Solution :

On a pour tout $t \geq 0$

$$\exists 0 < c < t, \quad e^t - e^0 = (t - 0)e^c \text{ avec } 0 < c < t$$

Comme $\exp$ est croissante, on a $e^c \leq e^t$ et

$$e^t - e^0 = e^t - 1 = t e^c \leq t e^t$$

4. Intégration

4.1. Calculer $\int_{x=0}^1 x^2 + 3x - 2 \, dx$.

Solution :

On a

$$\int_{x=0}^1 x^2 + 3x - 2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{6}$$

4.2. Calculer : $\int_{t=0}^1 3^t 2^{3t} \, dt$

Solution :

On a

$$3^t 2^{3t} = 3^t 8^t = 24^t = e^{t \ln 24}$$

d'où

$$\int_{t=0}^1 3^t 2^{3t} dt = \int_{t=0}^1 e^{t \ln 24} dt = \left[\frac{e^{t \ln 24}}{\ln 24} \right]_{t=0}^1 = \frac{e^{\ln 24} - 1}{\ln 24} = \frac{24 - 1}{\ln 24} = \frac{23}{\ln 24}$$

4.3. Calculer $\int_{x=0}^{2\pi} \cos x e^x dx$ en utilisant la formule d'Euler.

Solution :

On a

$$\cos x e^x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e^x = \frac{e^{ix} e^x + e^{-ix} e^x}{2} = \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2}$$

donc

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos x e^x dx = \int_{x=0}^{2\pi} \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2\pi} e^{(1+i)x} dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^{2\pi} e^{(1-i)x} dx.$$

Par ailleurs,

$$\int_{x=0}^{2\pi} e^{(1+i)x} dx = \left[\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} \right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{e^{2(1+i)\pi} - 1}{1+i} = \frac{e^{2\pi} - 1}{1+i}$$

et

$$\int_{x=0}^{2\pi} e^{(1-i)x} dx = \left[\frac{e^{(1-i)x}}{1-i} \right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{e^{2(1-i)\pi} - 1}{1-i} = \frac{e^{2\pi} - 1}{1-i}$$

d'où

$$\int_{x=0}^{2\pi} \cos x e^x dx = \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \right) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \times \frac{1-i+1+i}{1^2 - i^2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$$

5. Formes indéterminées

5.1. Énoncer la règle de l'Hôpital.

Solution :

a et ℓ désignent des nombres, $-\infty$ ou $+\infty$,

$$\lim_a f = 0 \text{ et } \lim_a g = 0 \text{ et } \lim_a \frac{f'}{g'} = \ell \implies \lim_a \frac{f}{g} = \ell$$

$$\lim_a f = \infty \text{ et } \lim_a g = \infty \text{ et } \lim_a \frac{f'}{g'} = \ell \implies \lim_a \frac{f}{g} = \ell$$

5.2. Application : Donner si elle existe la valeur de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n} - 1}{x^n - 1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

On a

- $x^{2n} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ et $x^n - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$,
- $(x^{2n} - 1)' = 2n x^{2n-1}$ donc $(x^{2n} - 1)' \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2n$,
- $(x^n - 1)' = n x^{n-1}$ donc $(x^n - 1)' \xrightarrow{x \rightarrow 1} n$.
- $\frac{(x^{2n} - 1)'}{(x^n - 1)'} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2$.

Au total, on applique la règle de l'Hôpital pour obtenir $\frac{x^{2n} - 1}{x^n - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2$

5.3. Application : Donner si elle existe la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

Solution :

On a, tenant compte des calculs déjà effectués précédemment,

- $1 - \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $x \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,
- $(1 - \cos x)' = \sin x$ donc $(1 - \cos x)' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
- $(1 - \cos x)'' = \cos x$ donc $(1 - \cos x)'' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.
- $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$ donc $(x \sin x)' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,
- $(x \sin x)'' = 2 \cos x - x \sin x$ donc $(x \sin x)'' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$,

Au total, on applique deux fois la règle de l'Hôpital : $\frac{(1 - \cos x)''}{(x \sin x)''} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$,
 $\frac{(1 - \cos x)'}{(x \sin x)'} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ et $\frac{1 - \cos x}{x \sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.

6. Équations différentielles ordinaires

6.1. Soit (E) $y'' - 3y' + 2y = 0$

6.1.1. Quelles sont les solutions de la forme e^{rx} où r est un nombre ?

Solution :

Si e^{rx} est solution de (E) alors

$$e^{rx''} - 3e^{rx'} + 2e^{rx} = r^2 e^{rx} - 3r e^{rx} + 2e^{rx} = (r^2 - 3r + 2)e^{rx} = 0$$

Comme l'exponentielle n'est pas nulle, cela donne $r^2 - 3r + 2 = 0$. Donc r vaut 1 ou 2. Réciproquement, pour $r = 1$ on a

$$(e^x)'' - 3(e^x)' + 2e^x = e^x - 3e^x + 2e^x = 0$$

et pour $r = 2$ on a

$$(e^{2x})'' - 3(e^{2x})' + 2e^{2x} = 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0$$

6.1.2. En déduire toutes les solutions de (E)

Solution :

Les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{2x}$ où k_1 et k_2 sont des constantes.

6.1.3. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$.

Solution :

On détermine k_1 et k_2 tels que $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. Cela donne

$$y(0) = 2 = k_1 e^0 + k_2 e^{2 \times 0} = k_1 + k_2$$

et comme $y'(x) = k_1 e^x + 2k_2 e^{2x}$

$$y'(0) = 3 = k_1 e^0 + 2k_2 e^{2 \times 0} = k_1 + 2k_2$$

On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 2 = k_1 + k_2 \\ 3 = k_1 + 2k_2 \end{cases}$$

dont la solution est $k_1 = k_2 = 1$. La solution cherchée est donc $e^x + e^{2x}$.

6.2. Soit (E) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

6.2.1. Quelles sont les solutions de la forme e^{rx} où r est un nombre ?

Solution :

Si e^{rx} est solution de (E) alors

$$(e^{rx})'' + 4(e^{rx})' + 4e^{rx} = r^2 e^{rx} + 4r e^{rx} + 4e^{rx} = (r + 2)^2 e^{rx} = 0$$

Comme l'exponentielle n'est pas nulle, cela donne $(r + 2)^2 = 0$. Donc r

vaut -2 . Réciproquement, on a

$$(e^{-2x})'' + 4(e^{-2x})' + 4e^{-2x} = 4e^{-2x} - 8e^{-2x} + 4e^{-2x} = 0$$

6.2.2. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution :

Les solutions de (E) sont donc de la forme $(k_1 + x k_2) e^{-2x}$ où k_1 et k_2 sont des nombres.

6.2.3. En déduire toutes les solutions de (E') $y'' + 4y' + 4y = 4$.

Solution :

Pour tout nombre C , on a

$$(y + C)'' + 4(y + C)' + 4(y + C) = y'' + 4y' + 4y + 4C$$

donc y est solution de (E) si et seulement si $y + C$ est solution de $z'' + 4z' + 4z = 4C$. Pour $C = 1$ on obtient le résultat. Les solutions de (E') sont de la forme $(k_1 + x k_2) e^{-2x} + 1$ où k_1 et k_2 sont des nombres.