Contrôle terminal

Les téléphones, calculatrices, autres outils électroniques ou documents ne sont pas autorisés. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Pour chacune des suites suivantes, décider si la limite existe, et la calculer si elle existe.
   (a) $\left(5+(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
   (b) $\left((-1)^n + 5 \cdot \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
   (c) $\left(\frac{2n^3+\sin(n)n^2+57}{3n^3-\cos(n)n+12}\right)_{n\geq 0}$

2. (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n = \frac{n^2-2\cos(n)}{n-4}$, $b_n = \frac{n^2+3\sin(n)}{n-6}$ divergent (plus précisément elles convergent vers l'infini).
   (b) Calculer $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ en justifiant les étapes du calcul.

3. Trouver les termes généraux des suites suivantes:
   (a) $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}; a_0 = 5, a_1 = -5$
   (b) $b_{n+2} = 6b_{n+1} - 9b_n; b_0 = b_1 = 2.$

4. Décidez de la convergence/divergence des séries suivantes.

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+7}{(1-n)^2}$,
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+5n^2+3\sin(n)}{n^5+n-2\cos(n)}$

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

5. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & \lambda \end{pmatrix}$$
   avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Sans utiliser la théorie des déterminants
   (a) Trouver une valeur de λ telle que A est inversible, et calculer l'inverse dans ce cas.
   (b) Trouver une valeur de λ telle que A n'est pas inversible.

6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et soit $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(v) = Av$.

(a) Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$

(b) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Écrire $\mathrm{Im}(f)$ comme espace de solutions d'un système d'équations linéaires.

(d) Calculer $\mathrm{Im}(f) \cap L$ où L est le sous-espace affine $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Vec}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.