

Contrôle Terminal

19 décembre 2024, 13h30 – 15h30

L'usage de tout document est interdit. Le seul dispositif électronique autorisé est la calculatrice non programmable.

Exercice 1

Soit la courbe paramétrée définie par : $M(t) \begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}, t \in]0, \infty[.$

1. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.
2. Déterminer le point stationnaire $M(t_0)$.
3. Dessiner l'allure de la courbe au point $M(t_0)$, en précisant le sens du déplacement. (On pourra poser $h = t - t_0$ et effectuer un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ en $t = t_0$ jusqu'à l'ordre 3.)
4. Étudier les branches en $t \rightarrow 0$ et en $t \rightarrow \infty$.

Exercice 2

1. Calculer les primitives et les intégrales suivantes :

(a) $\int (2x^3 + x^2 - 4x + 3)dx$ (b) $\int (x^2 + 4x + 2)^3(x + 2)dx$ (c) $\int x^2 \cos(x)dx$

(d) $\int \frac{1}{x^3 + x^2 - 6x}dx$ (e) $\int_e^{e^3} x^2 \ln(x)dx$ (f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \cos(x)dx$

2. Calculer la longueur de la courbe (C) définie par la représentation paramétrique $M(t)$:

$$x(t) = e^t \cos(t), \quad y(t) = e^t \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

3. Déterminer l'aire de la région délimitée par les courbes (C_f) et (C_g) associées respectivement aux fonctions f et g , définies par :

$$f(x) = x^2 + 4x - 3, \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1.$$

Exercice 3

Pour chaque équation différentielle suivante, déterminer d'abord la solution générale de l'équation homogène (E_0) associée à (E) , puis trouver une solution particulière y_p de (E) . En déduire ensuite la solution générale complète de (E) .

1. $(E) : y' + 2y = \cos(x)$ ($y_p = A \cos(x) + B \sin(x)$ où A, B sont des constantes)
2. $(E) : y'' - 2y' + y = x^3 e^x$ ($y_p = Q(x)e^x$ où Q est un polynôme)
3. $(E) : y'' - 2y' + 2y = e^x \cos(2x)$ ($y_p = (A \cos(2x) + B \sin(2x))e^x$ où A, B sont des constantes)