

Examen du 20 juin 2025, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. En sachant que $x = 1$ est une racine du polynôme suivant

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

trouver les autres racines réelles.

2.

- a. Rappeler la définition de la fonction $\tan(x)$.
- b. Montrer que

$$1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}.$$

- c. Calculer la dérivée de $\tan(x)$.
- d. Calculer la dérivée de $\arctan(x)$.

3. On considère la fonction

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x}.$$

- a. Donner le domaine de définition de f .
- b. Calculer les limites aux bords du domaine de définition et à $\pm\infty$.
- c. Calculer la dérivée de f et donner le domaine de dérivabilité de f .
- d. Trouver tous les points critiques de f .
- e. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f .

4. Donner, pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

- a. xe^{x^2} ,
- b. $x \cos(x)$.

5. Calculer les intégrales suivantes :

- a. $\int_a^b x^n dx$, $n \neq -1$, $0 < a < b$,
- b. $\int_0^\pi (\sin x)^2 dx$.

6. Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \ln(1 + x^2)}{(e^{x^2} - 1)^2}.$$