Examen du 8 janvier 2025, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction
$$f(x) = \frac{e^x}{2-x^2}.$$

a. Donner le domaine de définition de f.

b. Calculer les limites aux bords du domaine de définition et à $\pm\infty$.

c. Calculer la dérivée de f et donner le domaine de dérivabilité de f.

d. Trouver tous les points critiques de f.

e. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f.

2. Donner, pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

a. $\left(\frac{1}{x-2}\right)^2$,

b. $x^2 \ln(x)$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-2}^{2} \left(x^6 + x^3\right) dx$,

b. $\int_0^1 x \sin(x) dx$.

4. On considère la fonction
$$g(x) = \sqrt{2x-1}.$$

a. Donner le domaine de définition D de $g(x)$.

b. Montrer que la fonction $g(x)$ est strictement croissante sur D.

c. En déduire que $g(x)$ est une application bijective de D vers un ensemble E. Déterminer l'ensemble E.

d. Donner la fonction réciproque $g^{-1}(y)$ de $g(x)$.

5. Déterminer les trois premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction définie par :
$$h(x) = (\sin(2x))^2.$$

6. Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités :
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^{2x})(1-e^{-2x})}{x^2}.$$