Université de Bourgogne
MathPC2A

Année 2024-2025
16 mai

Epreuve d'algèbre linéaire
Durée : 2h00

Exercice 1. (3 points)

Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs suivants $e_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Indiquer en le justifiant si la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est libre ou liée.
2. Indiquer en le justifiant si la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre ou liée.
3. Indiquer en le justifiant si la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre ou liée.

Exercice 2. (5 points)
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + z + t \\ 2x + 2y - z \\ -2x - 2y + z + t \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Donner la matrice A de f dans les bases canoniques.
2. Donner une base de $\ker f$.
3. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
4. Etudier l'injectivité de f.
5. Etudier la surjectivité de f.

Exercice 3. (5 points)

Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs suivants $e_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *et* $e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit B la matrice de l'endomorphisme g dans la base canonique définie par

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice B et en déduire si cette matrice est inversible.
2. Calculer la matrice de passage P entre la base canonique et la base (e_1, e_2, e_3).
3. Calculer l'inverse de la matrice P.
4. Calculer la matrice de g dans la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 4. (6 points)

1. Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme h associée à la matrice suivante

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Factoriser complètement le polynôme caractéristique sachant que **3** est une valeur propre.
3. En déduire les valeurs propres de h et déterminer les espaces propres associés.
4. Indiquer en le justifiant si l'endomorphisme h est diagonalisable.
5. Donner la forme de la matrice de h dans une base comportant un maximum de vecteurs propres (et éventuellement complétée par d'autre(s) vecteur(s)).

Exercice 5. (3 points)
Soit E l'espace vectoriel des suites numériques réelles et soit S l'application de E dans E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par

$$v_n = u_{n+1},$$

pour tout entier naturel n.

1. Montrer que S est bien une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de S.
3. Montrer que S est surjective.