Université de Bourgogne
L2 MaPC3A **2024/25**

Examen de rattrapage

16 juin 2025 ; durée : 2 h

Ex 1. Question de cours. Soit E un espace euclidien de dimension n.

a) Démontrer que pour toute forme linéaire $\mathcal{F} : E \to \mathbb{R}$ il existe un vecteur $\mathbf{y} \in E$ tel que $\forall \mathbf{x} \in E$

$$\mathcal{F}\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

b) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Donner la définition de ∇f.

Ex 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Trouver la matrice de la rotation d'angle $\pi/3$ autour du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ex 3. Calculer le gradient et le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x) = \langle \mathbf{a} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}), \mathbf{x} \rangle,$$

où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

Ex 4. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = x^3 - 8y^2 - 4xy - 2x,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle.

Ex 5. Determiner l'aire et la position du centre de masse de la partie bornée du plan délimitée par les droites d'équation :

$$y = 3; \quad y = -3x; \quad y = x.$$