

Examen

18 décembre 2024 ; durée : 2 h

Ex 1. Question de cours.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Donner la définition d'une fonction f différentiable au point $x \in D$.
- b) Donner la définition de la dérivée directionnelle $D_h f$ en direction $h \in \mathbb{R}^n$ au point $x \in D$.
- c) Montrer que si f est différentiable au point $x \in D$ elle admet des dérivées directionnelles $D_h f$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

Ex 2. Calculer le gradient et le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{a}, \mathbf{x} \wedge \mathbf{b} \rangle,$$

où $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

Ex 3. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = x^2 y^2 - 5x^2 y + 4x^2 - y^3 + 12y,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 4. Soit D la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x - 2; \quad y = x^2 - x - 2,$$

- a) Trouver l'aire de D .
- b) Calculer les coordonnées du centre de gravité de D .

Ex 5. Calculer l'intégrale

$$\int_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy,$$

où D est un demi-disque défini par

$$D = \{(x, y) : y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$