

Examen – Session 2 – 19 juin 2025

– Durée : 2h –

L'usage de notes, d'une calculatrice ou de tout autre appareil électronique n'est pas autorisé. Tout argument mathématique doit être soigneusement justifié, en privilégiant clarté et concision.

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Énoncer le théorème de la bijection. [1 point]
2. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction réelle bijective et dérivable, et soit $y \in J$. [1 point]
 - (a) À quelle condition la fonction réciproque f^{-1} est-elle dérivable en y ?
 - (b) Lorsque cette condition est vérifiée, donner une expression de $(f^{-1})'(y)$ en fonction de f' et de f^{-1} .

Exercice 2. On considère la fraction rationnelle f définie par l'expression : $f(x) = \frac{x^2+6x-22}{x^2+x-30}$.

1. Déterminer le domaine de définition maximal de f , que vous noterez $\mathcal{D}_f$. [1 point]
2. Décomposer f en éléments simples. [2 points]
3. Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$. [1 point]
4. Déterminer le développement limité de f en $+\infty$ à l'ordre 2. [2 points]
5. Quelle est la position du graphe Γ_f par rapport à la courbe d'équation $y = 1 + \frac{5}{x}$ au voisinage de $+\infty$? [1 point]

Exercice 3. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(1+x^2)^{1/3}}{1+\frac{1}{3}x^2}$.

1. Montrer que le graphe de g admet une symétrie, et préciser la nature de cette symétrie. [1 point]
2. Déterminer le développement limité de g en 0 à l'ordre 4. [2 points]
3. Quelle est, au voisinage de 0, la position relative du graphe Γ_g par rapport à la droite d'équation $y = 1$? [1 point]
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, justifier que g est dérivable en x et donner une expression de $g'(x)$. [2 points]
5. Déterminer, si elles existent, les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. [1 point]
6. Montrer que g établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]0, 1[$. [1 point]
7. Quelle est, sur $\mathbb{R}$ tout entier, la position relative de Γ_g par rapport à la droite d'équation $y = 1$? [1 point]

Exercice 4. Déterminer les primitives suivantes.

1. $\int x^2 \sinh(2x + 1) dx$ [2 points]
2. $\int \frac{x}{x^2+2x+2} dx$ [2 points]