Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2024–2025
Janvier 2025

Contrôle Terminal de Math1B

Aucun document et aucun appareil électronique (téléphone inclus) n'est autorisé.

Durée : 2 heures

Question de cours 1 (*4 points*).

(1) Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Donner la définition du *plus petit multiple commun* de a et b, noté $\mathrm{ppcm}(a, b)$.

(2) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathrm{pgcd}(a, b) \cdot \mathrm{ppcm}(a, b) = ab$.

(3) Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, si a et b divisent c, alors $\mathrm{ppcm}(a, b)$ divise c.

Question de cours 2 (*4 points*).

(1) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

(2) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ et $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.

(3) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Question de cours 3 (*2 points*). Soit $\mathcal{D}$ une droite affine dans le plan P d'équation

$$(E) \quad ax + by = c\,,$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$. Posons $\omega = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c$. Soit $M \in P$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si z vérifie l'égalité

$$(E_{\mathbb{C}}) \quad \bar{\omega} z + \omega \bar{z} = k\,.$$

Exercice 1 (*4 points*). Soient $a = 1245$ et $b = 945$.

(1) Calculer $\mathrm{pgcd}(a, b)$ avec l'algorithme d'Euclide.

(2) En déduire une identité de Bézout.

(3) Calculer $\mathrm{ppcm}(a, b)$.

(4) Déterminer l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $ua + vb = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exercice 2 (*3 points*). Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$Z^2 + (-1 + 4i)Z - 5 + i = 0\,.$$

Exercice 3 (*3 points*).

(1) Calculer le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$ et de $1 + i$. En déduire le module et un argument de $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$.

(2) Déduire de (1) une expression exponentielle puis une expression algébrique de $(z_0)^8$.

(3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 + z_0 = 0$. On donnera les solutions sous forme exponentielle.