
Examen

durée : 2h

La calculatrice est interdite

Questions de cours (6 pts)

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$.

1. Donner la définition utilisant les quantificateurs de m est un *minorant* de A .
2. Donner la définition utilisant les quantificateurs de m est le *plus petit élément* de A .
3. Sans les quantificateurs, donner la définition de m est la *borne inférieure* de A .
4. Soit m un minorant de A . Ecrire, en utilisant les quantificateurs, la caractérisation de m est la *borne inférieure* de A .
5. Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Exercice 1 (4 pts)

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Le justifier soigneusement.

1. Le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est irrationnel.
2. La somme de deux irrationnels est un irrationnel.
3. Le produit de deux irrationnels est un irrationnel.
4. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Exercice 2 (4 pts)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0 \neq 0$.

1. Donner, sans démonstration, l'expression de u_n en fonction de n , q et u_0 .
2. A quelle condition la suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ?
3. Donner l'expression de $\sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n , q et u_0 .
4. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'expression donnée en question 3.

Tournez la page

Exercice 3 (3 pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{E(x)}{x}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

1. Etudier la limite à droite en 0 de f .
2. Etudier la limite à gauche en 0 de f .
3. Etudier la limite en $+\infty$ de f .

Exercice 4 (3 pts)

1. Donner l'énoncé de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.
2. Montrer en utilisant cette formule que :
Pour tout $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$