
Examen

durée : 2h

La calculatrice est interdite

IMPORTANT : Pour obtenir les points aux questions, vous devez rédiger de façon rigoureuse les démonstrations et justifier précisément toutes vos affirmations.

Questions de cours (7 pts)

1. Donner la première inégalité triangulaire pour trois réels x, y, z et la démontrer.
2. Soient I un intervalle ouvert et $x_0 \in I$
 - (a) Soit f une fonction définie sur I . Donner la définition de f est dérivable en x_0 .
 - (b) Soit f une fonction définie sur I , dérivable en x_0 et qui ne s'annule pas sur I . Démontrer que $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ est dérivable en x_0 et donner $g'(x_0)$.
 - (c) Soit f une fonction dérivable et de dérivée positive sur I . Démontrer que f est croissante sur I .

Exercice 1 (3 pts)

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \ln \left(\frac{\sin x}{x} \right)$.
3. En déduire un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \ln \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)$.
4. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_n = n^2 \ln \left(n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

Exercice 2 (4 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(1+x)$.

1. Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un ensemble à préciser.
2. Déterminer $f^{-1}(1 + \ln 2)$.
3. Donner en le justifiant l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .
4. Rappeler la formule donnant $(f^{-1})'(y)$ et calculer $(f^{-1})'(1 + \ln 2)$.

Tourner la page

Exercice 3 (3 pts)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \sin(1/x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (4 pts)

1. Donner la formule de Taylor-Lagrange pour $\cos(x)$ à l'ordre 3 en 0 (reste à l'ordre 4).
2. En déduire l'inégalité, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^4}{24}$$

3. En déduire une estimation de $\cos(\frac{1}{2})$ et une majoration de l'erreur (on exprimera chacun de ces deux résultats sous forme d'une seule fraction).