Examen L1 Math 2B, 19 mai 2025

durée 2 heures

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 (5 pts).

(i) (QC) Donner la définition d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels.

(ii) Enoncer et démontrer le théorème du rang.

Exercice 2 (6 pts). (i) Préciser, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, pour quelle(s) valeur(s) de $\lambda \in \mathbb{R}$ le système d'équations linéaires

$$(S) \begin{cases} 3x - y + \lambda z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + 2y - \lambda z &= 1 \end{cases}$$

a zéro, une ou une infinité de solutions.

(ii) Déterminer le rang de la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \lambda \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) Soit $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f_\lambda(\vec{v}) = A_\lambda.\vec{v}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$ et de $\mathrm{Im}(f_\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (4 pts). Soient A et B les matrices carrées suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si ces matrices sont inversibles, et trouver leur inverse si elle existe.

Exercice 4 (5 pts). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}) = A$.

(i) Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.

(ii) Soient

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}')$ de f par rapport à $\mathcal{B}'$.