

Contrôle terminal — Compléments de mathématiques, Math2C — Durée : 2 heures

Une attention particulière sera portée à la rédaction. **Justifier vos affirmations.**

Tout document est interdit.

Les calculatrices, les téléphones portables ou tout autre dispositif électronique sont interdits.

Exercice 1. (7 pts) On considère l'équation différentielle :

$$y' + \sin(x) y - \frac{\sin(x)}{y} = 0. \quad (A)$$

a) Soit $y: J \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (A) où J est un intervalle ouvert sur lequel y ne s'annule pas. Montrer que la fonction $u = y^2$ est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$u' + 2 \sin(x) u = 2 \sin(x). \quad (B)$$

b) Trouver la solution générale de l'équation différentielle (B).

c) Utiliser la solution trouvée en b) pour résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + \sin(x) y - \frac{\sin(x)}{y} = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = -2 \end{cases}.$$

Donner la solution sur le plus grand intervalle ouvert possible.

Exercice 2. (4 pts) Soit l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$ (E).

a) Trouver la solution générale de l'équation homogène associée à (E).

b) Trouver une solution particulière de (E).

Exercice 3. (5 pts) Soient X et Y des ensembles non vides et soit $f: X \rightarrow Y$ une application.

a) Rappeler la définition de $f(A)$ pour $A \subset X$.

b) Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$ pour $B \subset Y$.

c) Pour tout $A \subset X$, montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

d) Donner un exemple d'une application $f: X \rightarrow Y$ et d'une partie $A \subset X$ telles que $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f , que l'on justifiera, pour que :

$$\forall A \subset X, \quad A = f^{-1}(f(A)). \quad (Z)$$

Exercice 4. (4 pts) Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la famille d'ensembles définie par $A_n = \{x \in \mathbb{R} ; x^{n+1} \leq (2x)^n\}$.

a) Déterminer $I := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

b) Déterminer $U := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

(Écrire I et U comme union finie d'intervalles.)