Contrôle terminal – 11/06/2025 – 2h
Math3A : analyse – L2 S&T

Exercice 1 : Nature de suites

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les suivantes sont définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ (vous pourrez les noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$). Pour chacune de ces suites, déterminer si elle admet (ou pas) une limite, et lorsqu'elle existe, trouvez cette limite.

i) $\dfrac{\sin(n) - n}{x^n}$ ii) $\dfrac{n^x}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ iii) $n^2\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 2 : Croissance d'une limite de fonctions croissantes

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on désigne par f_n une fonction réelle $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De plus, on désigne par g une autre fonction réelle : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Dans cette première question, on suppose que les hypothèses

$$\begin{cases} \text{Chacune des fonctions } f_n \text{ est croissante.} & \text{(i)} \\ \text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } g, & \text{(ii)} \end{cases}$$

sont toutes les deux satisfaites, et on va montrer que dans ce cas la fonction g est elle même croissante :

   (a) Exprimer à l'aide de quantificateurs la condition (i).

   (b) De même, exprimer la condition (ii) à l'aide de quantificateurs.

   (c) En utilisant ces deux conditions (i) et (ii), montrez que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in [x; +\infty[, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad g(x) - g(y) \leqslant \varepsilon$$
   Indication : pour un n bien choisi, on pourra utiliser l'égalité
   $$g(x) - g(y) = (g(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(y)) + (f_n(y) - g(y)).$$

   (d) En déduire que la fonction g est croissante.

2. Si l'on pose $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{n+1} \end{cases}$ existe-t-il une fonction g telle que (f_n) converge simplement vers g ? Qu'est-ce que la question 1 permet de conclure sur cette fonction g ?

3. On conserve les notations précédentes (pour chaque $n \in \mathbb{N}$, f_n désigne une fonction réelle $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; de plus g désigne aussi une fonction réelle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), et on cherche d'autres résultats similaires à celui montré en question 1. Pour chaque affirmation ci-dessous, on vous demande de fournir soit une preuve de l'affirmation (si elle est correcte) soit un contre exemple (si elle est fausse) :

   (a) L'énoncé ci-dessous est-il correct ?

Si les deux hypothèses $\begin{cases} (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } g \\ g \text{ est croissante} \end{cases}$ sont satisfaites, alors chacune des fonctions f_n est croissante.

   (b) L'énoncé ci-dessous est-il correct ?

Si les deux hypothèses $\begin{cases} \text{chaque fonction } f_n \text{ est strictement croissante} \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } g \end{cases}$ sont satisfaites, alors g est strictement croissante.

Exercice 3 : Convergence uniforme

Un·e étudiant·e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour chacune des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ci-dessous, indiquer s'il existe une fonction g telle que (f_n) converge simplement vers g sur $\mathbb{R}$, et déterminer si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

i) $f_n : x \mapsto \exp(x - n^3)$ ii) $f_n : x \mapsto \exp(-n\exp(nx) - \exp(-nx))$

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x - n^3) = \exp\left(\lim\limits_{n\to\infty} x - n^3\right) = \exp(-\infty) = 0$, donc (f_n) tend vers la fonction nulle (g est la fonction nulle).

De plus chaque f_n est continue, et la limite g est continue aussi, donc la convergence est uniforme.

ii) Si $x > 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} n\exp(nx) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(-nx) = 0$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(-n\exp(nx) - \exp(-nx)) = 0$.

Au contraire, si $x < 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} n\exp(nx) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(-nx) = 0$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(-n\exp(nx) - \exp(-nx)) = \exp(0) = 1$.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction g est discontinue (alors que les f_n sont continues) donc la convergence n'est pas uniforme.

1. Pour chacune des questions (i) et ii)), la réponse de l'étudiant·e est-elle correcte ? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux. *(Si vous affirmez qu'une réponse est erronée, il n'est pas nécessaire de trouver toutes les erreurs commises, il suffit de donner au moins une bonne raison de considérer la réponse sur la limite simple (et/ou sur la limite uniforme) comme insuffisante et/ou fausse.)*
2. Pour chacune des questions (i) et ii)), si vous avez jugé que la réponse l'étudiant·e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrivez-la complètement en donnant une réponse correcte et satisfaisante à l'énoncé auquel répondait cet·te étudiant·e.

Exercice 4 : Séries entières

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières $\sum a_n z^n$ ci-dessous. Si $R > 0$, calculez aussi la somme de la série entière à l'intérieur du disque ouvert de convergence.

i) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^{3n}$ ii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\, e^{in\pi/25} z^n$ iii) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \exp(2000 + 25n) z^n$