

L'énoncé est constituée d'exercices **indépendants** (il n'est pas nécessaire d'avoir réussi un exercice pour pouvoir faire les autres) dont les deux premiers portent sur le théorème suivant :

Théorème de dérivation d'une limite de fonctions

Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et telles que

- i) pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- iii) $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et sa dérivée est g .

Exercice 1 : Preuve du théorème

On considère des fonctions f et g et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions réelles, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui satisfont les hypothèses i), ii) et iii) du théorème.

Cet exercice vise à démontrer qu'alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et que sa dérivée est g .

1. Justifier que la fonction g est nécessairement continue sur I .
2. Dans cette question, on fixe un nombre $x_0 \in I$. On va chercher à démontrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = g(x_0)$.

- (a) Exprimer avec des quantificateurs l'affirmation « g est continue en x_0 ».
- (b) Exprimer de même l'affirmation « $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers g ».

- (c) Pour $x \in I$, on désigne par $I_0(x)$ l'intervalle $I_0(x) = \begin{cases} [x, x_0] & \text{si } x \leq x_0 \\ [x_0, x] & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, il existe un nombre $h_n(x) \in I_0(x)$ tel que $f_n(x) - f_n(x_0) = (x - x_0)f'_n(h_n(x))$.

- (d) Grâce aux résultats des questions 2a, 2b et 2c, montrez que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \exists N \in \mathbb{N} :$

$\forall n \in \llbracket N; +\infty \llbracket, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, |f_n(x) - f_n(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} |x - x_0|.$

Indications :

- Vous serez peut-être amené.e à utiliser le résultat des questions 2a et 2b pour une autre valeur de ε (par exemple $\varepsilon/2$ ou $\varepsilon/3$ ou quelque chose d'analogue).
- Vous serez probablement amené.e à décomposer $f'_n(h_n(x)) - g(x_0)$ sous la forme $(f'_n(h_n(x)) - g(h_n(x))) + (g(h_n(x)) - g(x_0))$.

- (e) En déduire que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I \setminus \{x_0\},$
 $|f(x) - f(x_0) - (x - x_0)g(x_0)| < \varepsilon |x - x_0|.$

- (f) Conclure que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) = g(x_0)$.

3. Conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $f' = g$.

Exercice 2 : Convergence vers la valeur absolue

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}. \end{cases}$

1. Démontrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue.
2. Démontrer que chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
3. Utilisez le *théorème de dérivation d'une limite de fonctions* pour démontrer que $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, la suite $(f_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction (que l'on notera g dans la suite de cet exercice).
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f_n'(x) - g(x)| = 1$. En déduire que $(f_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. *Indication : on pourra étudier la monotonie de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{nx^2}}} - 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ses limites en 0 et en $+\infty$.*
6. Soit $\delta > 0$. Montrer que sur $[\delta, +\infty[$, la suite $(f_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

Exercice 3 : Séries entières

1. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières ci-dessous :
 - i) $\sum (-1)^n \frac{n-1}{n+1} z^n$
 - ii) $\sum z^{n!}$
2. Montrer que la fonction $x \mapsto (1-x) \cos(\pi x)$ est développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer les coefficients de ce développement en série entière, et son rayon de convergence.

Exercice 4 : Rayon de convergence

Un-e étudiant-e a répondu à l'énoncé suivant :

Pour chaque série entière $\sum a_n z^n$ ci-dessous, déterminer son rayon de convergence R , et sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur le disque $D(0, R)$.

- i) $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$
- ii) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n$

Il/elle a écrit la réponse ci-dessous

i) $1/R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} = 1.$

De plus, quand $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-z}.$

ii) D'après le critère de Hadamard,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n} = - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1}\right)^0 = -1.$$

Donc $R = -1$.

De plus $(-1)^n \frac{n}{n+1} = (-1)^n - \frac{(-1)^n}{n+1},$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{\ln(1+z)}{z}.$$

1. Pour chacune des questions (i) et ii), la réponse de l'étudiant-e est-elle correcte? Si ce n'est pas le cas indiquez clairement quels aspects de la réponse sont insuffisants et/ou faux.
2. Pour chacune des questions (i) et ii), si vous avez jugé que la réponse l'étudiant-e n'était pas bonne (ou pas assez bonne), réécrire complètement la réponse en donnant une réponse correcte et satisfaisante.