

Examen

Mercredi 18 décembre 2024 (Durée: 2h)

Exercice 1 (Questions de cours (6 points)).

- (1) Énoncer et démontrer la caractérisation de la trigonalisabilité en terme du polynôme caractéristique.
- (2) Énoncer le théorème de décomposition de Dunford. Démontrer l'existence de la décomposition de Dunford.

Exercice 2 (Maîtrise de concepts (4 points)).

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Toute réponse non clairement justifiée ne sera pas considérée.

- (1) Si $F = \{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E de dimension n , alors $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base de E .
- (2) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
- (3) Soit $n \geq 2$. Une matrice triangulaire supérieure $T \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si T est diagonale.
- (4) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que λ^2 est valeur propre de A^2 . Alors λ ou $-\lambda$ est valeur propre de A .

Exercice 3 (9 points).

Soit $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 3 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer le polynôme caractéristique χ_A et montrer que 2 est l'unique valeur propre de A .
- (2) En déduire que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et que sa décomposition de Dunford est $A = D + N$ avec $D = 2I_3$ et $N = A - 2I_3$.
- (3) Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.
- (4) Calculer $\chi_B(X)$. Montrer que $\text{Spec}(B) = \{1, 2\}$ et que B est diagonalisable.
- (5) Calculer les projecteurs spectraux de B .
- (6) Exprimer $\exp(tB)$ en terme des projecteurs spectraux π_1 et π_2 de B .
- (7) Soit $(x(t), y(t), z(t))$ la solution du système d'équations différentielles:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = 8x(t) - 2y(t) + 3z(t) \\ z'(t) = 8x(t) - 4y(t) + 5z(t) \end{cases}$$

telle que $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$. Calculer $(x(t), y(t), z(t))$ en fonction de t .

Exercice 4 (3 points).

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

- (1) Montrer que $\chi_M(t) = t^2 - \text{Tr}(M)t + \det(M)$. A quelle condition χ_M est-il scindé ?
- (2) En déduire que M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\text{Tr}(M)^2 - 4\det(M) \geq 0$.
- (3) En déduire que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas limite de matrices trigonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$.