Examen
Intégration et calcul différentiel. Durée 2h00.

Remarque : soignez votre rédaction. La présentation sera prise en compte dans la correction.

⋆⋆⋆

EXERCICE 1. On désigne par $D \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (a,b) pour lesquels l'intégrale

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$$

est convergente. La fonction B, définie sur D, est appelée fonction bêta d'Euler.

1. Pour quelles valeurs de a et b la fonction $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est-elle bornée sur $[0,1]$ (et donc intégrable au sens de Riemann) ? Justifier.
2. Pour quelles valeurs de a et b l'intégrale $B(a,b)$ est-elle convergente ? Justifier.
3. Calculer $B(p,1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
4. Au moyen d'un changement de variable approprié, montrer que : $\forall (a,b) \in D \quad B(a,b) = B(b,a)$.
5. Calculer $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ [*on pourra par exemple utiliser le changement de variable* $u = \sin^2 t$].
6. Au moyen du changement de variable $t = \frac{1}{1+s}$ établir que : $\forall (a,b) \in D \quad B(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{s^{b-1}}{(1+s)^{a+b}}\,\mathrm{d}s$.
7. Soit $(a,b) \in D$. En intégrant par parties $\displaystyle\int_0^x \frac{s^{b-1}}{(1+s)^{a+b}}\,\mathrm{d}s$ pour $x \geq 0$, établir que $B(a,b+1) = \dfrac{b}{a+b} B(a,b)$.
8. En déduire que : $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \qquad B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

⋆⋆⋆

EXERCICE 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = \int_x^{xy} f(t)\mathrm{d}t$$

admet des dérivées partielles en tout point et est de classe $\mathcal{C}^1$.

⋆⋆⋆

EXERCICE 3. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère la courbe plane Γ définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - 2\cos t \\ y(t) = \sin(2t) + 2\sin t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Réduction de l'intervalle d'étude.
   (a) Vérifier que cette représentation paramétrique est 2π périodique.
   (b) Étudier l'effet du changement de variable $t \mapsto -t$ sur la courbe Γ.
   (c) En déduire un intervalle d'étude approprié.
2. Représentation graphique.
   (a) Calculer le vecteur dérivé et dresser le tableau des variations de x et y.
   (b) Déterminer la nature des points stationnaires, en $t = \frac{\pi}{3}$ et $t = \pi$.
   (c) Représenter graphiquement la courbe **sur une période complète**.
3. Calculer la longueur de l'arc de courbe pour $t \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$ [*on rappelle que la longueur d'un arc est égale à l'intégrale de la norme du vecteur dérivé*].