

Examen du 10 juin 2025 – durée 2h

*Les calculatrices, téléphones portables, etc. sont interdits pendant l'épreuve.
On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.*

(L'examen est imprimé au format recto-verso.)

Exercice 1 (Les questions en italique sont des questions de cours).

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.
 - a) *Enoncer, sans démonstration, la loi d'inertie de Sylvester.*
 - b) *Soient q et q' deux formes quadratiques sur E . Montrer qu'elles sont équivalentes si et seulement si $\text{sgn}(q) = \text{sgn}(q')$.*
2. En notant $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, soit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y) = \sum_{i+j \in 2\mathbb{N}+1} x_i y_j.$$

- a) Montrer que φ est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^4$. De plus, écrire la matrice associée à φ dans la base canonique.
- b) Peut-on définir une forme quadratique $q_\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ associée à φ ?
Si c'est le cas, écrire q_φ et trouver sa signature. Sinon, justifier.
3. Soit $E = \mathbb{R}[X]_3$ muni de la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.

Trouver des sous-espaces vectoriels de dimension maximale où la forme quadratique suivante est positive, négative, définie positive et définie négative :

$$q(f) = f(0)^2 - f'(1)^2 - f'''(2)^2.$$

Exercice 2. Soit E l'espace des séries numériques de carré sommable, muni du produit scalaire

$$\left\langle \sum_{n \geq 1} u_n \middle| \sum_{n \geq 1} v_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n, \quad \text{pour tout } \sum_{n \geq 1} u_n, \sum_{n \geq 1} v_n \in E.$$

Soit $F \subset E$ le sous-espace vectoriel engendré par $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ qui sont, respectivement, les séries dont le n -ème terme est donné par

$$u_n^{(1)} = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u_n^{(2)} = \begin{cases} 2 & n = 1, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad u_n^{(3)} = \frac{1}{3^n}.$$

(Ainsi, $u^{(3)}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$.)

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}\}$ est une famille libre de F .
2. Orthonormaliser la famille $\mathcal{B}$ par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 3 (Les questions en italique sont des questions de cours).

1. *Enoncer et démontrer le théorème spectral réel.* [Note : vous pourrez admettre, sans le démontrer, que toute matrice symétrique réelle M admet uniquement des valeurs propres réelles, et que pour chaque valeur propre on peut trouver un vecteur propre réel associé à M .]
2. Soit $E = \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille 2×2 . On considère le produit scalaire

$$\langle - | - \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle A | B \rangle = \text{tr}({}^t A B),$$

ainsi que la base $\mathcal{B}$ de E donnée par

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Soit l'application linéaire $\psi : E \rightarrow E$, $\psi(A) = A + {}^tA$. Ecrire la matrice M_ψ de ψ dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire que ψ est un endomorphisme symétrique.
- b) Calculer les valeurs propres de M_ψ , et trouver pour chacune d'entre elles une base de l'espace propre formée de vecteurs propres réels (écrits en terme de $\mathcal{B}$).
- c) Peut-on appliquer le théorème spectral réel à l'application linéaire $\tilde{\psi} : E \rightarrow E$ définie par $\tilde{\psi}(e_{11}) = e_{12}$, $\tilde{\psi}(e_{12}) = e_{21}$, et $\tilde{\psi}(e_{21}) = \tilde{\psi}(e_{22}) = 0$?

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit f_a l'endomorphisme de E dont la matrice en la base canonique est :

$$M_a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1a \\ -2 & 1 & 2a \\ -1 & 2 & -2a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f_1 et f_{-1} sont orthogonaux.
2. Montrer que f_{-1} est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle.
3. Est-ce que f_{-1} est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
4. Montrer que f_1 est une rotation-miroir dont on précisera l'axe et l'angle.