Examen du 6 mai 2025 – durée 2h

Les calculatrices, téléphones portables, etc. sont interdits pendant l'épreuve.
On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1 (Les questions en italique sont des questions de cours). Soit E un espace euclidien.

1. Soit f un endomorphisme de E.
   a) *Définir ce qu'est l'adjoint f^* de f puis justifier que f^* existe.*
   b) *Supposons $f = f^*$. Démontrer que les valeurs propres de f sont réelles.*
   c) Donner un exemple de f sans valeur propre réelle, satisfaisant $f^* = -f$.
   d) *Soit $f = f^*$. Énoncer et démontrer le théorème spectral pour f.*
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ avec $a \neq \pm 2$. Posons :

$$M_a = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3a+8 & 8 & 6a-4 \\ 8 & -3a+8 & -6a-4 \\ 6a-4 & -6a-4 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Quel est le rang des matrices $M_a - a\mathbb{1}_3$ et $M_a - 2\mathbb{1}_3$?
   (b) Appliquer le théorème spectral pour diagonaliser M_a à l'aide d'une matrice orthogonale.
   (c) Que se passe-t-il si $a = 2$ ou $a = -2$ ou $a = 0$?

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E. Pour $x \in E$, notons $(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x) \in \mathbb{R}^4$. Posons

$$F = \{x \in E \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

1. Déterminer la projection orthogonale sur F d'un vecteur $x \in E$.
2. Calculer la distance $d(x, F)$ d'un vecteur x de E au sous-espace F.
3. Soit s_F la symétrie orthogonale d'axe F. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(s_F)$.

Exercice 3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour tout $f, g \in E$, posons :

$$\varphi(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2/2}dx.$$

Posons, pour tout $h \in E$, $\psi_\lambda(h) = h'' - xh' + \lambda h$.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \varphi(f, g)$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que ψ_λ est auto-adjoint par rapport au produit scalaire φ.

Exercice 4. Soit $a \in \{-1, 1\}$ et soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard. Soit f_a l'endomorphisme de E dont la matrice en la base canonique est :

$$M_a = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2a \\ 6 & -2 & -3a \\ -2 & 3 & -6a \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f_1 et f_{-1} sont orthogonaux. Que vaut f_1^{-1} ? Que vaut f_{-1}^{-1} ?
2. Montrer que f_1 est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle.
3. Est-ce que f_1 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
4. Montrer que f_{-1} est une symétrie dont on précisera l'axe.
5. Diagonaliser f_{-1} en une base orthonormée.