MECA4A

DISQUE TROUE EN MOUVEMENT SUR UNE PENTE

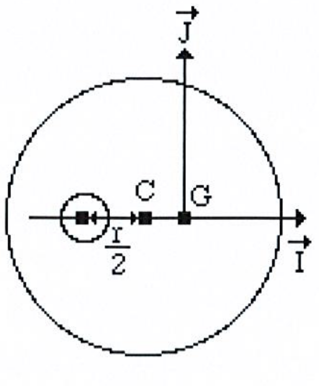
(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère un système mécanique rigide S en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen R = $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Ce repère est attaché a une pente faisant un angle θ avec l'horizontale de telle sorte que le vecteur $\vec{x}$ soit orienté suivant la ligne de la pente descendante. Le vecteur $\vec{y}$ est quant à lui perpendiculaire au vecteur $\vec{x}$ et orienté vers le haut. Le système S, de masse m, est modélisé comme étant un disque rigide homogène de rayon r, de densité surfacique ρ, dans lequel on a découpé un trou circulaire de rayon r/3 centré à r/2 du centre du disque. On note G son centre de masse et C son centre géométrique. Le repère lié au disque est le repère $R_s = (G, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tel que $\vec{CG} = \frac{r}{16}\vec{I}$ et $\vec{K}$ orthogonal au plan du disque. On donne la matrice d'inertie de S en G dans le repère R_s :

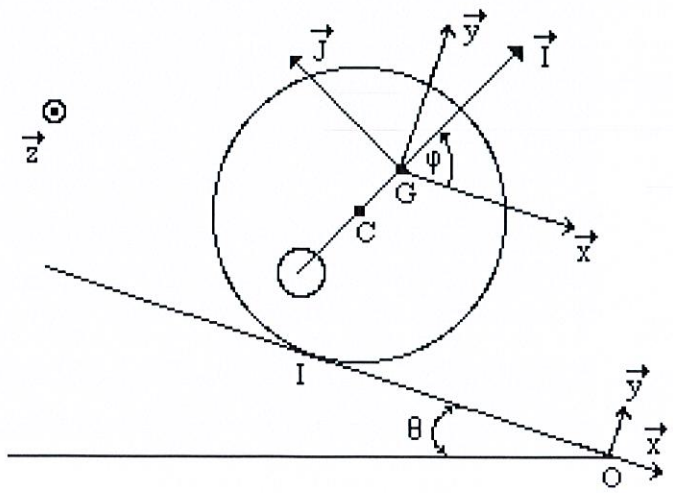
$$[J_G(S)]^{R_s} = m\frac{r^2}{16}\begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Le disque S roule sans glisser sur la pente de telle sorte que le plan $(\vec{I}, \vec{J})$ reste au cours du temps dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$. On note : $\varphi = (\widehat{\vec{x}, \vec{I}})$. Le point géométrique de contact entre S et la pente est noté I, le point matériel appartenant à la pente au lieu du contact est noté I_P et le point matériel appartenant à S au lieu du contact est noté I_S.

On suppose l'existence d'un champ de pesanteur vertical descendant uniforme et constant $\vec{g}$.



Le système dans son repère lié



Le système en mouvement

1. CINEMATIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

1.1. Donner l'expression des éléments de réduction en I_S et G du torseur cinématique de S par rapport à R.

1.2. Donner l'expression de l'accélération par rapport à R du point G.

2. CINETIQUE (GEOMETRIE DES MASSES)

2.1. Calculer le vecteur $\overrightarrow{CG}$.

2.2. Calculer la matrice d'inertie de S au point G.

3. CINETIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

3.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G et en I_S du torseur cinétique de S par rapport à R.

3.2. Donner l'expression des éléments de réduction en G et en I_S du torseur dynamique de S par rapport à R.

3.3. Donner l'expression de l'énergie cinétique de S par rapport à R.

4. DYNAMIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

4.1. Donner la forme et quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en I_S du torseur des actions extérieures agissant sur S. Pour chacune d'elles, donner l'expression de la puissance développée dans le mouvement repéré par rapport à R et éventuellement le potentiel dont elles dérivent. On donnera également l'expression de la puissance des efforts intérieurs à S dans R.

4.2. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S en I_S (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

4.3. En supposant que les équations du mouvement sont résolues, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(t)$ est connue, montrer que l'on peut donner l'expression des éléments de réduction du torseur de la réaction de la pente sur le système.

4.4. Donner l'équation du second ordre qui gouverne l'évolution du paramètre φ.

4.5. En appliquant le Théorème de l'Energie Cinétique à S, montrer que l'équation qui gouverne l'évolution du paramètre φ est bien équivalente à l'équation du 4.4.

5. ETUDE DES POSITIONS D'EQUILIBRE ET MOUVEMENT PARTICULIER

Dans toute cette partie, on se place dans le cas ou $\theta = 0$.

5.1. Trouver les positions d'équilibre du mouvement et discuter leur stabilité.

5.2. On souhaite étudier le mouvement particulier du système défini par :

$$\varphi(t) = \varepsilon(t) + \varphi_E^S \quad \text{où} \begin{cases} \varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t) \text{ restent voisins de } 0 \\ \varphi_E^S \text{ est la position d'équilibre stable} \end{cases}$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\left(\varepsilon(t_0 = 0) = \varepsilon_0 = 0, \dot{\varepsilon}(t_0 = 0) = \dot{\varepsilon}_0\right)$$

5.2.1. Donner l'équation du mouvement linéarisé.

5.2.2. Résoudre l'équation et donner la période des oscillations du mouvement.