TUBE SOUS PRESSION INTERNE SANS EFFET DE FOND

Soit un repère cartésien orthonormé $R = (O_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ où $x = (x_i)_{i=1,2,3}$ est la position d'un point M. On considère un tube cylindrique Ω d'axe x_3. Les surfaces latérales intérieure $\Sigma_2{}^i$ et extérieure $\Sigma_2{}^e$ ont une section circulaire de rayon respectif a et b. Ce tube est limité en hauteur par Σ_0 située à $x_3 = 0$ et par Σ_1 située à $x_3 = l$. On note O le centre d'inertie de la section courante Σ, O_0 et O_1 les centres d'inertie des sections Σ_0 et Σ_1 et le repère R est principal d'inertie.

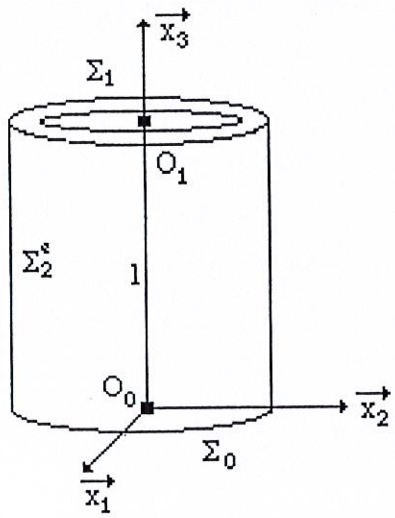
En tout point M de Σ, on définit le repère local des coordonnées cylindriques (r, φ, $x_k = x_3$) par :

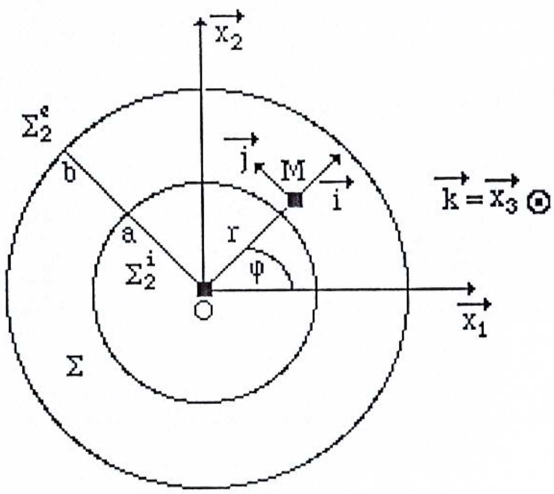
$$R_c = (O_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} = \vec{x}_3) \text{ avec } r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ et } \begin{cases} \vec{i} = \cos\varphi\, \vec{x}_1 + \sin\varphi\, \vec{x}_2 \\ \vec{j} = -\sin\varphi\, \vec{x}_1 + \cos\varphi\, \vec{x}_2 \end{cases}$$

On se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations.

On suppose que le domaine est en équilibre quasi-statique sous les conditions suivantes :

- les forces de volume sont négligées ;
- la surface $\Sigma_2{}^i$ est soumise à la pression interne p_i ;
- la surface $\Sigma_2{}^e$ est soumise à la pression externe p_e ;
- les faces Σ_0 et Σ_1 sont libres d'effort.





A - Cas d'un matériau inhomogène anisotrope

On suppose que le domaine est constitué d'un matériau élastique linéaire inhomogène anisotrope.

1. Montrer que le tube est globalement en équilibre.
2. Ecrire les équations à résoudre (projetées dans le repère cylindrique) si l'on souhaite déterminer en tout point du cylindre le champ des contraintes et le champ des déplacements.
3. Le problème ainsi posé rentre-t-il dans le cadre des problèmes généraux d'élasticité ? Discuter l'existence et l'unicité des solutions.

B - Cas d'un matériau homogène isotrope

On suppose que le domaine est constitué d'un matériau élastique linéaire homogène isotrope.

1. On s'attend à ce que le champ de déplacement soit le suivant :

$$\vec{u}(M) = u_r(r)\,\vec{i} + u_k(x_z)\,\vec{k}$$

Justifier ce choix.

2. En déduire le champ des déformations puis celui des contraintes
3. Le champ de déplacement intuité est-il solution du problème ? Celui des contraintes ?

FORMULAIRE (sans sommation sur les indices muets)

Composantes du tenseur des contraintes et des déformations dans le repère cylindrique

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rk} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi k} \\ \sigma_{rk} & \sigma_{\varphi k} & \sigma_{kk} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{rk} \\ \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & \varepsilon_{\varphi k} \\ \varepsilon_{rk} & \varepsilon_{\varphi k} & \varepsilon_{kk} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right),\ \varepsilon_{rk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r}\right)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r},\ \varepsilon_{\varphi k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial x_k}\right),\ \varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

- Divergence d'un tenseur symétrique d'ordre deux dans le repère cylindrique

$$\overrightarrow{\text{div}}\, \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_k} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi k}}{\partial x_k} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi k}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x_k} + \frac{\sigma_{rk}}{r} \end{pmatrix}$$

- Equations de Navier (pour un matériau élastique linéaire isotrope)

$$(\lambda + \mu)\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \{\text{div}(\vec{u})\} + \mu\, \Delta\vec{u} + \rho\vec{f} = \rho\vec{\gamma}$$

$$(\lambda + 2\mu)\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \{\text{div}(\vec{u})\} - \mu\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})\} + \rho\vec{f} = \rho\vec{\gamma}$$

- Loi de Hooke

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\sigma)\, I \Leftrightarrow \sigma = \lambda\, \text{tr}\{\varepsilon(\vec{u})\}\, I + 2\mu\, \varepsilon(\vec{u})$$

- Gradient d'une fonction scalaire

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

- Gradient d'un vecteur

$$\text{grad}\, \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} & \frac{\partial v_r}{\partial x_k} \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_l}{r} & \frac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \\ \frac{\partial v_k}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_k}{\partial \varphi} & \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

- Divergence d'un vecteur

$$\text{div}\, \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

- Divergence d'un tenseur du second ordre

$$\overrightarrow{\text{div}}\, t = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial t_{rk}}{\partial x_k} + \dfrac{t_{rr} - t_{\varphi\varphi}}{r} \\ \dfrac{\partial t_{\varphi r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial t_{\varphi k}}{\partial x_k} + \dfrac{t_{r\varphi} + t_{\varphi r}}{r} \\ \dfrac{\partial t_{kr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial t_{k\varphi}}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial t_{kk}}{\partial x_k} + \dfrac{t_{kr}}{r} \end{pmatrix}$$

- Laplacien d'une fonction scalaire

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

- Laplacien d'un vecteur

$$\Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_r - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \dfrac{v_r}{r^2} \\ \Delta v_\varphi + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\varphi}{r^2} \\ \Delta v_k \end{pmatrix}$$

- Rotationnel d'un vecteur

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r\, v_k)}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_k}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left\{\dfrac{\partial (r\, v_\varphi)}{\partial r} - \dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right\} \end{pmatrix}$$

- Solution d'équations différentielles simples (C_0 et C_1 sont des constantes)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{1}{t}\frac{dx(t)}{dt} = K \Rightarrow x(t) = \frac{K}{2}t^2 \ln t + t^2\left(C_1 - \frac{K}{4}\right) + C_0$$

$$A\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\,t = K \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{6}\frac{B\,t^3}{A} + \frac{1}{2}\frac{K\,t^2}{A} + C_1\,t + C_0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dx(t)}{dt} - \frac{x(t)}{t^2} + K\,t = 0 \Rightarrow x(t) = -\frac{K}{8}t^3 + C_0\,t + \frac{C_1}{t}$$

$$t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - t\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = C_1\,t\ln t + C_0 t$$

$$t^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt} - P\,x(t) + Q\,t = 0,\ P > 0 \Rightarrow \begin{cases} *\ \text{Si } P \neq 1 : x(t) = C_0\,t^{\sqrt{P}} + C_1\,t^{-\sqrt{P}} - \dfrac{Q}{1-P}\,t \\ *\ \text{Si } P = 1 : x(t) = C_0\,t + \dfrac{C_1}{t} - \dfrac{Q}{4}\,t\,(2\ln t - 1) \end{cases}$$