

	0		0		0		0		0		0		0		0		0
	1		1		1		1		1		1		1		1		1
	2		2		2		2		2		2		2		2		2
	3		3		3		3		3		3		3		3		3
	4		4		4		4		4		4		4		4		4
	5		5		5		5		5		5		5		5		5
	6		6		6		6		6		6		6		6		6
	7		7		7		7		7		7		7		7		7
	8		8		8		8		8		8		8		8		8
	9		9		9		9		9		9		9		9		9

← codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et écrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

Durée : 1h30 - Formulaire opérateurs différentiels autorisé - calculatrice collège autorisée.

Questions de cours : cocher la bonne réponse pour chaque question.

Cours 1 : Dans un écoulement de fluide parfait stationnaire le théorème de Bernoulli traduit :

- ☐ la conservation de l'énergie cinétique dans l'écoulement
- ☐ la conservation de la pression totale dans l'écoulement
- ☐ la conservation de la pression motrice dans l'écoulement

Cours 2 : Un fluide en mouvement a un débit constant si :

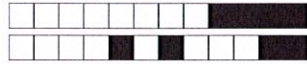
- ☐ l'écoulement est stationnaire et le fluide incompressible
- ☐ le fluide est parfait
- ☐ le fluide est incompressible

Cours 3 : Dans un liquide au repos :

- ☐ la pression motrice $p^* = p + \rho g z$ est constante
- ☐ la pression motrice $p^* = p + \rho g z$ augmente avec la profondeur
- ☐ la pression statique p est constante

Cours 4 : Pour calculer l'action d'un fluide en écoulement sur une paroi on peut :

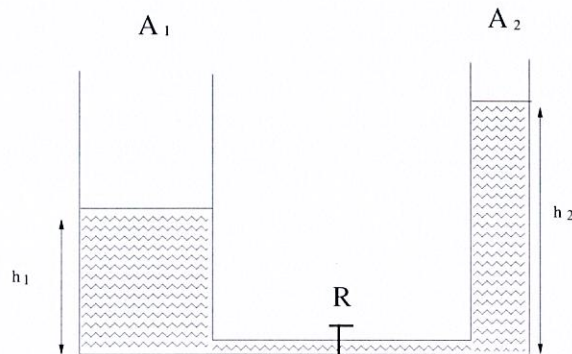
- ☐ utiliser le théorème de la statique
- ☐ utiliser le théorème de Bernoulli
- ☐ utiliser le théorème d'Euler



Exercices

Exercice 1 :

Deux vases A_1 et A_2 (ouverts à la pression atmosphérique) de sections $S_1 = 50 \text{ cm}^2$ et $S_2 = 10 \text{ cm}^2$, dont les bases sont dans un même plan horizontal, communiquent par un tube fin de volume négligeable, muni d'un robinet R initialement fermé.



A.N.: $\rho_{alcool} = \rho_a = 0.79 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $\rho_{Hg} = \rho_m = 13.6 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

1. (2 pts) Le robinet R étant fermé, on verse un litre de mercure dans le vase A_1 et 0,5 litre de mercure dans le vase A_2 . Quelles sont les hauteurs h_1 et h_2 du mercure dans les vases ?

☐ F ☐ P1 ☐ J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....
.....
.....

2. On ouvre le robinet R. **Après retour à l'équilibre**, on note x_1 et x_2 les hauteurs correspondant aux déplacements des deux surfaces libres du mercure dans les vases A_1 et A_2 respectivement.

(2 pts) Indiquer x_1 et x_2 sur le schéma au dessus et écrire les deux équations liant x_1 et x_2 (Indications : écrire les volumes déplacés après l'ouverture du robinet et on pourra noter h la nouvelle hauteur des surfaces libres dans les vases A_1 et A_2). Déterminez les expressions de x_1 et x_2 en fonction de S_1 , S_2 , h_1 et h_2 .

☐ F ☐ P1 ☐ J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....
.....
.....
.....
.....



(1 pt) Faire les applications numériques :

☐ $x_2 = 25 \text{ cm}$

☐ $x_1 = 15 \text{ cm}$

☐ $x_2 = 20 \text{ cm}$

☐ $x_2 = 15 \text{ cm}$

☐ $x_1 = 10 \text{ cm}$

☐ $x_1 = 5 \text{ cm}$

3. Le robinet étant toujours ouvert, on verse maintenant 1,5 litres d'alcool dans le vase A_1 (le mercure et l'alcool sont non miscibles, l'alcool est uniquement situé dans le vase A_1). On note maintenant y_1 et y_2 les hauteurs correspondant aux déplacements des surfaces du mercure dans les vases A_1 et A_2 respectivement et on note H_1 la hauteur de la colonne d'alcool.

3.1. (1 pt) Calculer H_1 :

☐ $H_1 = 30 \text{ cm}$

☐ $H_1 = 10 \text{ cm}$

☐ $H_1 = 20 \text{ cm}$

3.2. (2 pts) Faire un nouveau schéma représentant les fluides et les différentes cotes utiles : y_1 , y_2 et H_1 (Indication : x_1 et x_2 ne sont plus utiles).

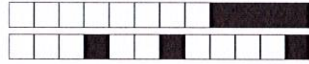
☐ F ☐ P1 ☐ J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3.3. (1 pt) Donner la relation liant y_1 , y_2 , S_1 et S_2 .

☐ F ☐ P1 ☐ J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....
.....
.....
.....



3.4. (3 pts) Déterminer l'expression de y_2 dans le vase A_2 . Déduire y_1 de la question précédente.

☐F ☐P1 ☐P2 ☐P3 ☐J *Ne pas cocher - Réservé au correcteur*

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

(1 pt) Faire les applications numériques.

☐ $y_1 = 1.29 \text{ cm}$

☐ $y_1 = 3.29 \text{ cm}$

☐ $y_2 = 0.45 \text{ cm}$

☐ $y_2 = 3.45 \text{ cm}$

☐ $y_2 = 1.45 \text{ cm}$

☐ $y_1 = 0.29 \text{ cm}$

3.5. (1 pt) Que vaut la différence de niveau d entre la surface libre d'alcool dans le vase A_1 et la surface libre de mercure dans le vase A_2 .

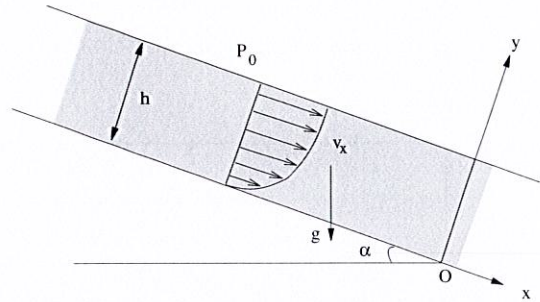
☐ $d = 2,826 \text{ cm}$

☐ $d = 0.2826 \text{ cm}$

☐ $d = 28,26 \text{ cm}$

**Exercice 2 :**

On considère l'écoulement plan stationnaire d'un fluide visqueux incompressible sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Le fluide est soumis aux seules forces de pesanteur ($\vec{g}$: vertical descendant). L'écoulement est dirigé suivant l'axe $O\vec{x}$, et on choisit l'axe $O\vec{y}$ perpendiculaire à $O\vec{x}$ (voir figure ci-contre). On note h l'épaisseur constante de l'écoulement, et P_0 la pression atmosphérique à la surface libre.



1. (1 pt) En supposant que le champ des vitesses est de la forme : $\vec{V} = V_x \vec{e}_x$ ($V_y = 0$), montrer que la composante V_x ne dépend que de y .

☐ F ☐ P1 ☐ J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....

.....

.....

.....

2. (2 pts) À l'aide de la question précédente et des hypothèses, donnez l'expression des équations de Navier-Stokes sur les axes Ox et Oy (indication : écrire $\vec{g}$ dans le repère Oxy et utiliser les équations de Navier-Stokes du formulaire).

☐ F ☐ P1 ☐ J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....

.....

.....

.....

.....

3. (2 pts) Calculer la pression $p(x, y)$ et montrer à l'aide des conditions aux limites qu'elle ne dépend que de y (Indication : Attention aux constantes d'intégration).

☐ F ☐ P1 ☐ J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....

.....

.....

.....

.....



4. (2 pts) Écrire la première équation de Navier-Stokes (projection sur l'axe Ox). En déduire l'équation différentielle du second ordre qui permet de déterminer la vitesse V_x (Indication : utiliser les résultats de la question précédente et de la question 1).

☐F ☐P1 ☐J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....
.....
.....
.....

5. (3 pts) La condition limite à la surface libre ($y = h$) est : $\frac{dV_x}{dy} = 0$. En précisant la condition limite à la paroi ($y = 0$), déduire l'expression de $V_x(y)$ en fonction de ρ , g , α , h , y et μ .

☐F ☐P1 ☐P2 ☐J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

6. (2 pts) Calculer la vitesse moyenne V_m .

☐F ☐P1 ☐J Ne pas cocher - Réservé au correcteur

.....
.....
.....
.....
.....

Formulaire :

Équation de continuité (ECM) : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

Éq. de Navier-Stokes (incompressible) dans le champ de pesanteur : $\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} p + \mu \vec{\Delta} \vec{V}$