

Exercice 1 : Billard (≈12 points)

Angéline et Antoine jouent une partie de Pool anglais, variante du billard avec 16 boules de masse $m = 116 \text{ g}$ (7 boules rouges, 7 boules jaunes, une boule blanche dite boule de choc et une noire dite boule de but). Le but du jeu est de rentrer toutes les boules de couleur et ensuite la noire directement ou indirectement dans n'importe quel trou. Donc en fin de partie, il ne reste plus que la boule blanche et la boule noire sur le tapis (voir figure) et c'est à Angéline de jouer.

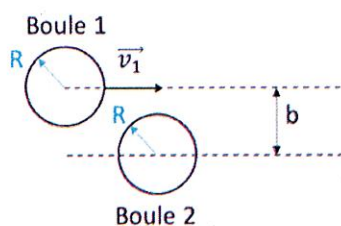
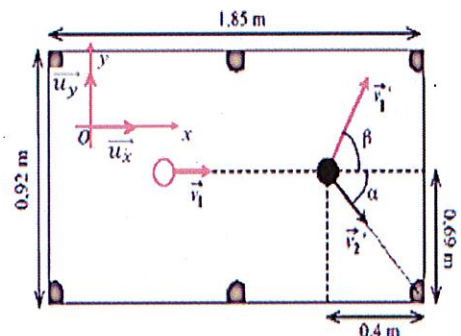
On simplifie le modèle en considérant la collision de 2 masses

identiques m et supposées ponctuelles. Avant le choc, la boule blanche a une vitesse $\vec{v}_1$ dirigée selon Ox ($v_1 = 1,0 \text{ m.s}^{-1}$) et la boule noire qu'elle percute est immobile. Le choc est élastique et on note α l'angle de la trajectoire de la boule noire avec l'axe Ox après le choc (figure). Pour le moment, α n'est pas supposé connu ; on le considère comme un paramètre à discuter (question 3).

1. Montrer que les boules partent à angle droit après le choc.

2. Établir que les vitesses des boules après le choc s'écrivent $v_2' = v_1 \cos \alpha$ et $v_1' = v_1 \sin \alpha$.

3. Les vitesses des boules dépendent de leur trajectoire après le choc, il faut donc déterminer l'angle α . Pour cela, on tient compte désormais de la taille des boules de billard ($R = 2,5 \text{ cm}$). Le choc se ramène donc à la collision de 2 sphères dures de rayon R . On note b le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance séparant le centre des 2 boules avant le choc (voir figure).

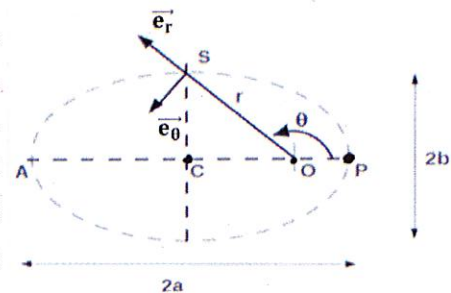


A partir d'un schéma au moment du contact entre les 2 boules, on montre que $\sin \alpha = \frac{b}{2R}$.

Si $b = R$, quelles sont les vitesses v_1' et v_2' des 2 boules et est-ce que la boule noire arrive dans le trou en bas à droite ?

Exercice 2 : Moment cinétique d'un satellite (≈10 points)

Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse m , décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre (foyer O, centre de la Terre). Le centre de l'ellipse est noté C, ses demi-axes a et b (voir figure). Le satellite est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) et orbite dans le sens des θ croissants. Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par la Terre, dirigée vers O. La vitesse du satellite en P est $\vec{v}_p$.



1. Sur la figure, représenter les vecteurs vitesses du satellite (direction et sens) à son périégée P ($\vec{v}_p$), à son apogée A ($\vec{v}_A$) et à son sommet S ($\vec{v}_S$).

2. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}_O(P)$ par rapport au point O du satellite situé en P. Il sera exprimé en fonction de m , v_p , a et $c = CO$ dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Calculer numériquement $L_O(P)$ (attention v_p à exprimer dans la bonne unité).

3. Énoncer le théorème du moment cinétique. Sachant que la seule force qui s'exerce sur le satellite est radiale, en déduire que le moment cinétique est constant sur l'ensemble de la trajectoire.

4. En déduire l'expression de la vitesse du satellite en A en fonction de a , c et v_p . La calculer.

Données : Ellipse : $a = 24,1 \cdot 10^3 \text{ km}$, $CO (=c) = 17,3 \cdot 10^3 \text{ km}$; masse satellite $m = 1000 \text{ kg}$; vitesse satellite en P : $v_p = 3,60 \cdot 10^4 \text{ km.h}^{-1}$