

1) Répondre aux questions suivantes :

- a) Formuler les postulats de base de la mécanique quantique.
- b) Quel est le rôle de l'équation de Schrödinger stationnaire ? et de l'équation de Schrödinger dépendant du temps ? Quel est le lien entre les solutions de ces deux équations ?
- c) Montrer que $\varphi(x, t) = \sum_n c_n \varphi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$ est solution de l'équation de Schrödinger pour tout choix des c_n , si les φ_n sont états propres du Hamiltonien, avec valeurs propres E_n . Déterminer les coefficients c_n à partir de la condition initiale $\varphi(x, t = 0)$.
- d) Ecrire l'équation d'onde pour un électron qui se propage dans le vide.
- e) Formuler le principe d'exclusion de Pauli et expliquer son rôle dans le tableau périodique des éléments.
- f) Ecrire l'Hamiltonien pour l'atome d'Hélium.
- g) Formuler les relations d'incertitude de Heisenberg et préciser leur signification. Donner des exemples.

2) On considère un modèle simple pour la rotation d'une molécule en termes d'un rotateur rigide décrit par l'Hamiltonien

$$H = B\vec{L}^2$$

où B est une constante caractéristique de la molécule et $\vec{L}$ est l'opérateur moment cinétique.

- a) Ecrire $\vec{L}$ en termes des opérateurs de position et d'impulsion.
- b) Déterminer les relations de commutation $[L_j, L_k]$ entre les composantes du moment cinétique.
- c) Déterminer la relation de commutation $[\vec{L}^2, L_3]$, en utilisant l'identité $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.
- d) Quelles sont les valeurs propres et les fonctions propres de l'Hamiltonien H ?
- e) Quel est le degré de dégénérescence des valeurs propres ?

Problème :

On considère un système à deux niveaux d'Hamiltonien H représenté dans la base canonique $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ par la matrice :

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le paramètre a est un paramètre réel.
2. Calculer les valeurs propres de H en fonction de a .
3. Calculer la trace et le déterminant de H .
4. Montrer que l'on peut déterminer les valeurs propres de H en connaissant uniquement la trace et le déterminant de la matrice associée.
5. Montrer que les vecteurs propres de H peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} |\chi_+\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)|-\rangle \\ |\chi_-\rangle = -\sin(\theta/2)|+\rangle + \cos(\theta/2)|-\rangle. \end{cases}$$

On donnera l'expression de θ en fonction de a .

6. Le vecteur d'état $|\phi(t)\rangle$ peut se décomposer sur la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sous la forme :

$$|\phi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle.$$

Ecrire le système d'équations différentielles couplées auxquelles obéissent les composantes $c_+(t)$ et $c_-(t)$.

7. En déduire que c_+ et c_- vérifient la même équation différentielle :

$$\ddot{c}_{\pm} + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 c_{\pm} = 0.$$

On donnera l'expression de Ω en fonction de a . Quelle est l'interprétation physique de Ω ?

8. Quelle est la solution de ce système d'équations différentielles sachant qu'à $t = 0$, on a $c_+(0) = 1$ et $c_-(0) = 0$.
9. Quel est le temps nécessaire pour réaliser un transfert de population de l'état $|+\rangle$ vers l'état $|-\rangle$?