A1) Répondre aux questions suivantes :

a) Formuler les postulats de la mécanique quantique.

b) Quel est le rôle de l'équation de Schrödinger stationnaire ? et de l'équation de Schrödinger dépendante du temps ? Quel est le lien entre les solutions de ces deux équations ?

c) Quelle est l'interprétation physique de l'opérateur Hamiltonien ?

d) Ecrire l'équation d'onde pour un électron qui se propage dans le vide.

e) Formuler le principe d'exclusion de Pauli et expliquer son rôle dans le tableau périodique des éléments.

f) Ecrire l'Hamiltonien pour l'atome d'Hélium.

g) Formuler les relations d'incertitude de Heisenberg et préciser leur signification. Donner des exemples.

h) Quelle est la relation entre les raies spectrales d'un atome d'hydrogène et les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondant ?

A2) On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Après le changement de variables $\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \qquad \bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \equiv -i\frac{d}{d\bar{x}}$ l'Hamiltonien s'écrit $H = \hbar\omega\bar{H}, \qquad \bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$.

On définit les opérateurs $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$ et $N := a^\dagger a$.

(a) Déterminer les relations de commutation $[\bar{x}\ ,\ \bar{p}]$, $\quad [a\ ,\ a^\dagger]$, $\quad [N\ ,\ a]$, $\quad [N\ ,\ a^\dagger]$.

(b) Montrer que les valeurs propres de H ne peuvent pas être négatives.

(c) Exprimer H en fonction de a et $a^\dagger$.

(d) Montrer que si φ est une fonction propre de H avec valeur propre E_n, alors $a^\dagger\varphi$ est aussi une fonction propre. Quelle est la valeur propre correspondante ?

(e) Si φ est une fonction propre de H avec valeur propre E_n, sous quelle condition est-ce que $a\varphi$ est aussi une fonction propre ? Quelle est la valeur propre correspondante ?

(f) Déterminer la fonction propre de l'état fondamental. Quelle est son énergie ?

(g) Ecrire la fonction propre φ_1 ddu premier état excité, explicitement comme fonction de la variable x.

Université de Bourgogne
Licence 3 de physique
CT Mécanique quantique 2024-2025

Probléme I : (5 points)
On considère une particule dans un triple puits de potentiel. On désigne par $|i\rangle$ ($i = 1, 2$ ou 3) l'état de la particule lorsqu'elle se trouve dans le puits numéro i et on suppose que $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$. On introduit dans le système un processus qui permet à la particule de passer d'un puits à l'autre par effet tunnel, avec une amplitude $T > 0$, ce qui conduit à l'Hamiltonien :

$$H = T(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|)$$

1. Ecrire la matrice Hamiltonienne dans la base $\{|i\rangle\}$.
2. Démontrer que l'opérateur permutation P défini par

$$P|1\rangle = |2\rangle,\ P|2\rangle = |3\rangle,\ P|3\rangle = |1\rangle$$

   commute avec H. On donnera la matrice de l'opérateur P dans la base $\{|i\rangle\}$.
3. Calculer P^3. En déduire les valeurs propres de P. Ces valeurs propres sont-elles réelles ? Ce résultat était-il attendu ?
4. Déterminer les vecteurs propres associés.
5. En déduire les valeurs propres de H et leur dégénérescence.

Problème II (5 points)
On rappelle que la fonction d'onde $|\psi\rangle$ d'un spin-1/2 peut

être paramétrée de façon générale par la donnée de deux nombres complexes c_+ et c_- ou bien deux angles (θ, ϕ) selon :

$$|\psi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})e^{-i\phi/2}|+\rangle + \sin(\frac{\theta}{2})e^{i\phi/2}$$

Un état peut donc être représenté par un point de coordonnées sphériques associées à (θ, ϕ) sur une sphère, appelée sphère de Bloch. On étudie ici la dynamique d'un spin 1/2 en présence d'un champ magnétique extérieur constant B pris selon l'axe z. On ne prend en compte que l'interaction Zeeman dans l'Hamiltonien H qui s'écrit donc $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. On note $\vec{\mu}$ l'observable moment magnétique associée au spin et on rappelle que $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{\sigma}$ avec $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ le vecteur des matrices de Pauli. On prendra $\mu_0 > 0$. L'état initial est donné par le couple (θ_0, ϕ_0).

1. Déterminer l'expression de la matrice Hamiltonienne dans la base $|\pm\rangle$. On introduira le paramètre ω_0 tel que $\hbar\omega_0 = \mu_0 B$. Quelle est la dimension physique de ce paramètre.
2. Trouver l'état $|\psi(t)\rangle$ en résolvant l'équation de Schrödinger.
3. En déduire les expressions de $\theta(t)$ et $\phi(t)$.
4. Représenter la trajectoire correspondante sur la sphère de Bloch. Comment appelle-t-on ce type de mouvement ?
5. Calculer les valeurs moyennes des composantes du spin $\vec{S}(t)$.