

Examen - 7 janvier 2025
durée : 2h

Notations. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est notée λ . La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est notée λ_2 . Pour alléger les notations on notera indifféremment dx à la place de $d\lambda(x)$, et $dx dy$ à la place de $d\lambda_2(x, y)$.

Le sujet est peut-être un peu long. Le barème sera adapté. Soignez la présentation et votre rédaction. Vous rédigerez vos exercices sur deux copies séparées :

exercices 1 et 2 sur une copie, exercices 3 et 4 sur une autre.

Citez les théorèmes du cours utilisés, en justifiant les hypothèses.

EXERCICE 1. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Soient μ et ν deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$. On rappelle que ν est **absolument continue** par rapport à μ si :

$$\forall A \in \mathcal{M} \quad (\mu(A) = 0) \implies (\nu(A) = 0).$$

1. On suppose dans cette question que ν est une mesure de densité f par rapport à μ (noté $\nu = f\mu$).

(a) Rappeler la définition de « ν est de densité f par rapport à μ ».

(b) Montrer que ν est **absolument continue** par rapport à μ .

2. On suppose dans cette question que :

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall A \in \mathcal{M} \quad (\mu(A) < \eta) \implies (\nu(A) < \varepsilon).$$

Montrer que ν est **absolument continue** par rapport à μ .

3. On suppose dans cette question que $(*)$ n'est pas satisfaite. En particulier, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}$ tels que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon$.

On pose $B_k = \bigcup_{n \geq k} A_n$ et $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k$ (autrement dit $B = \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$).

(a) **En justifiant au moyen de propriétés vues en cours :**

i. donner une majoration de $\mu(B_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis montrer que $\mu(B) = 0$;

ii. montrer que si ν est une mesure finie alors $\nu(B) \geq \varepsilon$.

(b) En déduire que la réciproque de la question 2 est vraie si ν est une mesure finie.

4. On considère $X =]0, 1]$, $\mathcal{M}$ la tribu des boréliens de $]0, 1]$, μ la mesure de Lebesgue sur $]0, 1]$ et ν la mesure de densité $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ par rapport à μ .

(a) Calculer $\nu([a, b])$ pour $0 < a \leq b \leq 1$.

(b) Justifier que ν n'est pas une mesure finie, mais qu'elle est σ -finie.

(c) Donner un exemple d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^n}$ et $\nu(A_n) \geq 1$.

EXERCICE 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient f_n la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x+x^{n+2}}}$ et $I_n = \int_{]0, +\infty[} f_n(x) dx$.

1. Expliciter la fonction f définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. Citer le théorème du cours utilisé.

Changez de copie !

EXERCICE 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $f(x, t) = \frac{\sin(tx)}{x} e^{-x}$. On pose $F(t) = \int_{]0, +\infty[} f(x, t) dx$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $t \mapsto F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(t)$.
3. En déduire une expression simplifiée de $F(t)$.

EXERCICE 4. On note : $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$ et $\Delta = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2} - 2\varphi\}$

1. Représenter T sur un premier graphique et Δ sur un second.
2. Soit $f : T \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x, y) = \frac{1}{1-xy}$ pour $(x, y) \in T$. On pose : $I = \int_T f(x, y) dx dy$.

(a) Pourquoi f est-elle mesurable sur T ?

(b) En utilisant un développement en série et un théorème du cours, montrer que $I = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.

3. On considère l'application $H : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(\theta, \varphi) \mapsto (x, y) = H(\theta, \varphi)$ définie par :

$$\begin{cases} x &= \sin \theta + \cos \theta \tan \varphi \\ y &= \sin \theta - \cos \theta \tan \varphi \end{cases}$$

On admet que $H(\Delta) = T$ et que H est un difféomorphisme de Δ sur T . Calculer le jacobien de H .

4. En utilisant le difféomorphisme H , calculer la valeur de $I = \int_T \frac{1}{1-xy} dx dy$.

5. En déduire la valeur de $\zeta(2) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$.