UNIVERSITÉ BOURGOGNE EUROPE | ANNÉE 2024-2025
U.F.R. *Sciences et Techniques* | *24 juin 2025*

L3-Algèbre 1
Examen
Durée : 3 heures

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Les anneaux dans cet examen sont supposés unitaires et commutatifs.

Exercice (1) (5 points) (Questions de cours)

(a) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $(n-1)! \equiv -1(\mod n)$ si et seulement si n est premier (Théorème de Wilson).

(b) Donner la définition d'un anneau euclidien. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

Exercice (2) (4 points)

(a) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier.

(b) Trouver le groupe $U(\mathbb{Z}/14\mathbb{Z})$ d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$. Trouver les ordres de tous les éléments du groupe. Est-il cyclique ? Si oui, déterminer un générateur.

Exercice (3) (5 points)

(a) Montrer que $20^{15} - 1$ est divisible par $11 \times 61 = 671$.

(b) Trouver le reste de la division de 2^{6754} par $385 = 11 \times 7 \times 5$.

Exercice (4) (4 points) Soit $A = \{P \in \mathbb{Q}[X] | P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}\}$.

(a) Montrer que A est un anneau intègre.

(b) Montrer que $2 \in A$ est irréductible mais pas premier.

(c) Montrer que A n'est pas factoriel.

Exercice (5) (2 points) Soit $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer tous les polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de degré 3 et 4.