UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques

ANNÉE 2024-2025
10 janvier 2025

L3-Théorie des anneaux et corps
Examen
Durée : 3 heures

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Les anneaux dans cet examen sont supposés unitaires et commutatifs.

Exercice (1) (5 points) (Questions de cours)

(a) Enoncer et démontrer le critère d'Eisenstein.

(b) VRAI ou FAUX ? Indiquer, pour chaque assertion suivante, si elle est VRAIE ou FAUSSE (sans justification) :

(i) Dans un anneau intègre, chaque élément premier est irréductible.

(ii) Un polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ de contenu $C(P) = 1$ est irréductible si et seulement si P n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}$.

(iii) Si A est un anneau factoriel, alors l'anneau $A[X]$ est factoriel aussi.

(iv) Soit A un anneau factoriel, et $a, b \in A$ deux éléments premiers entre eux. Alors ils existent $u, v \in A$ tels que $ua + bv = 1$.

Exercice (2) (5 points)

(a) Soit $A = \mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss. Trouver la décomposition en produit d'éléments premiers pour les éléments suivants de A. (Justifier les réponses) :

(i) 520 ;

(ii) 2211.

(b) Soit $\alpha = \frac{1+i\sqrt{11}}{2}$ et $B = \mathbb{Z}[\alpha]$. Montrer que $B = \{a + b\alpha | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de B.

(d) Décider si les éléments suivants sont irréductibles ou non dans B. (Justifier les réponses) :

(i) 2 ;

(ii) 3 ;

(iii) 5.

Exercice (3) (5 points)

(a) Décider si les polynômes suivants sont irréductibles ou réductibles dans $\mathbb{Z}[X]$. Justifier les réponses.

(i) $X^5 - 15X^3 + 9X^2 + 6X + 12$.

(ii) $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

(b) Soit $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Déterminer si les polynômes suivants dans $\mathbb{F}_3[X]$ sont irréductibles ou réductibles. (Notation : $\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.)

(i) $X^3 + X^2 + \overline{2}$;

(ii) $X^4 + \overline{2}X^2 + \overline{1}$.

(c) Décider si le polynôme $X^3 + 4X^2 - 3X - 10 \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible.

Exercice (4) (2 points) Soit A un anneau intègre avec un nombre fini d'éléments. Montrer que A est un corps.

Exercice (5) (3 points) Soit A un anneau intègre. Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.