

Examen du 19 mai 2025 – durée 3h

Exercice 1. Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif), $n \geq 2$ un entier et considérons $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Soit $((E_{i,j}) \mid (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2)$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

Une matrice de transvection élémentaire est $T_{i,j}(a) = \mathbf{1}_n + aE_{i,j}$ et une matrice de dilatation élémentaire est $D_i(a) = \mathbf{1}_n + (a-1)E_{i,i}$, avec $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $a \in \mathbb{K}^*$.

1. On veut montrer que G est engendré par les matrices de dilatation et de transvection élémentaires, puis que H est engendré par les matrices de transvection élémentaires.

(a) Quel est l'effet du produit à gauche (resp. à droite) de $T_{i,j}(a)$ sur une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$?
Quel est l'effet du produit à gauche (resp. à droite) de $T_{i,j}(1)T_{j,i}(-1)T_{i,j}(1)$ sur une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$?

- (b) On suppose dans cette question que $n = 2$. Montrer que pour toute matrice A de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ il existe des matrices de transvections élémentaires $L_1, L_2, \dots, L_p$ et $R_1, R_2, \dots, R_q$ telles que

$$L_p \cdots L_1 A R_1 \cdots R_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

En déduire que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection élémentaires et que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation élémentaires.

- (c) On suppose $n \geq 2$. Montrer que pour toute matrice A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ il existe des matrices de transvections élémentaires $L_1, L_2, \dots, L_p$ et $R_1, R_2, \dots, R_q$ telles que

$$L_p \cdots L_1 A R_1 \cdots R_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \quad \text{avec } A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$$

- (d) En déduire par récurrence que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection élémentaires et que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation élémentaires.

2. Montrer que les centres $Z(H)$ et $Z(G)$ sont constitués de matrices scalaires, i.e. de la forme $\lambda \mathbf{1}_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. Donner le cardinal de $Z(H)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
4. Rappeler la définition de sous groupe dérivé d'un groupe.
5. On note G' , H' les sous groupes dérivés de G et de H .
 - (a) Montrer que $G' \subset H$.
 - (b) Supposons $n \geq 3$ et soit $i, j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ distincts. Calculer le commutateur de $T_{i,k}(1)$ et $T_{k,j}(1)$.
 - (c) En déduire que $G' = H$ et $H' = H$.
6. Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
 - (a) Calculer le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
 - (b) Donner la définition de p -sous groupe de Sylow d'un groupe fini.
 - (c) Trouver un p -sous groupe de Sylow P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Est-ce que P est normal dans G ?

Exercice 2. Soit $n \geq 3$. On admet que $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \neq 4$. Soit H un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$, d'indice n . On souhaite montrer que H est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$. Posons $e = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

1. Vérifier l'énoncé si $n = 3$.
2. Montrer qu'un groupe de cardinal 6 est cyclique ou isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. En déduire l'énoncé si $n = 4$.
3. Supposons $n \geq 5$ et soit $N \neq \{e\}$ un sous groupe normal de $\mathfrak{S}_n$.
 - (a) Montrer que $N_0 = \mathfrak{A}_n \cap N$ est un sous groupe normal de $\mathfrak{A}_n$.
 - (b) Argumenter que N_0 ne peut pas être réduit à l'identité $\{e\}$.
 - (c) Déduire que $N_0 = \mathfrak{A}_n$ puis que $N = \mathfrak{A}_n$ ou $N = \mathfrak{S}_n$.
4. On suppose à nouveau que $n \geq 5$. On rappelle que H est un sous groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$. On pose $X = \mathfrak{S}_n/H = \{\sigma H \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ et on définit un morphisme $\rho : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ en faisant opérer $\mathfrak{S}_n$ sur X par $\rho(\tau)(\sigma H) = (\tau\sigma)H$, pour tout $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$.
 - (a) Décrire le noyau de ρ en terme de conjugués de H puis montrer que ρ est injectif.
 - (b) Déterminer le cardinal de $\mathfrak{S}(X)$ puis montrer que ρ est un isomorphisme.
 - (c) On note $S = \{\varphi \in \mathfrak{S}(X) \mid \varphi(eH) = eH\}$. Montrer que $\rho(H) \subset S$.
 - (d) Justifier que S est un sous groupe de $\mathfrak{S}(X)$ isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$ puis conclure $H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 3. Soit G un groupe, X, Y deux ensembles et $\phi : G \times X \rightarrow X, \psi : G \times Y \rightarrow Y$ des opérations (à gauche) de G sur X et Y . Pour tout $g \in G, x \in X$ et $y \in Y$, on notera $\phi(g, x) = g \cdot x$ et $\psi(g, y) = g \cdot y$. Notons $F = Y^X$, l'ensemble des applications $f : X \rightarrow Y$.

1. Pour tout $f \in F$ et $g \in G$, définissons $g \bullet f$ par $(g \bullet f)(x) = g \cdot f(g^{-1} \cdot x)$, pour tout $x \in X$. Montrer que ceci définit une action (à gauche) de G sur F .
2. Soit $f \in F$ et supposons que f est G -invariante, i.e., pour tout $g \in G$, on a $g \bullet f = f$. Soit $\mathcal{O}$ une G -orbite dans X . Montrer que $f(\mathcal{O})$ est une G -orbite dans Y .
3. Soit $X = Y = \mathbb{R}^2$. Identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ au moyen de la bijection $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\alpha(x, y) = x + iy$.
 - (a) Soit $G = \{1, i, -1, -i\}$. Poser $i \cdot (x, y) = (-y, x)$ puis en déduire que G opère à gauche sur $\mathbb{R}^2$.
 - (b) Décrire les orbites et les points fixes de cette action.
 - (c) Soit $f \in F$ et supposons que f est $\mathbb{R}$ -linéaire. Montrer, en identifiant X et Y à $\mathbb{C}$ via α , que f est $\mathbb{C}$ -linéaire si et seulement si f est G -invariante.
4. Soit $X = Y = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $G = \mathfrak{S}_3$, opérant par bijections sur Y et trivialement sur X . Donc par exemple, si $f \in F$ satisfait $f(1) = f(2) = 1$ et $f(3) = 2$, pour $g = (132) \in G$, on a que $h = g \bullet f$ satisfait $h(1) = h(2) = 3$ et $h(3) = 1$.
 - (a) Quel est le cardinal de F ?
 - (b) Décrire les G -orbites de l'action de G sur F . Combien d'orbites cela fait-il? Préciser leur cardinal.
 - (c) Vérifier la formule de Burnside pour l'action de G sur F .