

Licence de Mathématiques

2024-2025

Intitulé de l'enseignement : Théorie des Probabilités

Année : L3

Date : 19 Juin 2025

Examen 2ème session

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les documents, téléphones, montres connectées et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, respectivement de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1), \dots, \mathcal{P}(\lambda_n)$ où les paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont strictement positifs. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et φ_λ sa fonction caractéristique.

- ▷ 1) Montrer que $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $\mathbb{V}[X] = \lambda$.
- ▷ 2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.
- ▷ 3) En déduire que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.
- ▷ 4) Soit S_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre n . Montrer qu'on a la convergence en loi suivante vers une loi normale centrée réduite :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 2 : Soit n un entier naturel. On considère une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre 1 et Y une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que $Z = \frac{X}{Y+1}$ est une variable à densité par rapport à la mesure de Lebesgue et déterminer sa densité.

Exercice 3 : Soit X une variable aléatoire telle que X et $2X$ admettent la même fonction de répartition. Déterminer F . Que peut-on dire de X ?

Exercice 4 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi de Bernoulli de paramètre p . Soit Y_n une variable aléatoire telle que $Y_n = 0$ si $X_n = X_{n+1}$ et $Y_n = 1$ si $X_n \neq X_{n+1}$. Posons $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

- ▷ 1) Calculer la moyenne et la variance de S_n .
- ▷ 2) Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge dans L^2 vers $2p(1-p)$.
- ▷ 3) Etudier la convergence presque-sûre.

Exercice 5 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- ▷ 1) Montrer que $(S_n/n^{3/2})$ converge en probabilités vers 0.
- ▷ 2) Montrer que (S_{n^2}/n^3) converge presque sûrement vers 0.

Exercice 6 : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

- ▷ 1) La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ satisfait-elle la loi forte des grands nombres ?
- ▷ 2) Que dire du comportement asymptotique de (X_n) ?