Université Bourgogne Europe
UFR Sciences et Techniques

Année 2024-2025
Juin 2025

Examen de Topologie

Aucun document et aucun appareil électronique (téléphone inclus) n'est autorisé.

Durée : 3 heures

Question de cours 1. Soit (E, d) un espace métrique.

(1) Donner les définitions de *partie ouverte* et de *partie fermée* de E.

(2) Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

(3) Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.

(4) Montrer qu'une intersection quelconque d'ouverts de E n'est pas nécessairement un ouvert de E.

(5) Montrer qu'une intersection de fermés de E est un fermé de E.

Question de cours 2. Soient $((E_i, d_i))_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'espaces métriques et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$.

(1) Soient (F, d_F) un espace métrique et $f : F \to E$ une application. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on pose $f_i = \pi_i \circ f : F \to E_i$, où $\pi_i : E \to E_i$ est la projection sur la i-ème composante. Montrer que f est continue si et seulement si $f_i = \pi_i \circ f : F \to E_i$ est continue pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(2) Soit $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on définit la suite $(x_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ dans E_i en posant $x_i(k) = \pi_i(x(k))$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$. Montrer que $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ la suite $(x_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a_i.

Question de cours 3.

(1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Montrer que $[a, b]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Exercice 1. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé et V un sous-espace vectoriel de E.

(1) Démontrer que $\bar{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Démontrer que, si $\mathring{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.

(3) Soit H un hyperplan de E, c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire. Montrer que H est ou bien fermé, ou bien dense dans E.

Exercice 2. On considère les deux normes $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sur $E = \mathbb{R}^2$ définies par

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \ \|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)\,,$$

et on munit E de la métrique $d = d_2$ induite par $\| \ \|_2$.

(1) Montrer que les deux normes $\| \ \|_2$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes. En déduire que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \|u\|_\infty$, est uniformément continue.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\varphi(u) = \begin{cases} (0,0) & \text{si } u = (0,0)\,, \\ \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_2} u & \text{si } u \neq (0,0)\,. \end{cases}$$

(2) Démontrer que φ est bijective en exhibant son inverse.

(3) Démontrer que φ et φ^{-1} sont continues en $(0,0)$.

(4) On admet que φ et φ^{-1} sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Démontrer que la partie $A = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\|_\infty \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^2$, munie de la métrique induite, est homéomorphe à la boule unité $B(0,1) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\|_2 \leq 1\}$.

Exercice 3.

(1) Soit d la distance sur $\mathbb{R}$ définie par $d(x,y) = |x^3 - y^3|$. Démontrer que $(\mathbb{R}, d)$ est complet.

(2) Soit d la distance sur $\mathbb{R}$ définie par $d(x,y) = |e^x - e^y|$. Démontrer que $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.