



Mathématiques
SCIENCES ET TECHNIQUES
UNIVERSITÉ
BOURGOGNE EUROPE

**Licence de mathématiques - 3ème
année
Programme**

***Bachelor of Mathematics - 3rd year
Program***

Langue : Français

Responsable : Luis Paris (lparis@u-bourgogne.fr)

Language: French

Coordinator: Luis Paris (lparis@u-bourgogne.fr)

Objectifs

Aims

Le but de la Licence mention Mathématiques de l'Université Bourgogne Europe est de fournir aux étudiants une formation mathématique générale de haut niveau. Elle doit leur permettre de prétendre aux emplois d'ingénieurs qui requièrent un bon bagage mathématique, ou de poursuivre leurs études dans différentes écoles ou masters.

The aim of the Bachelor of Mathematics at the Université Bourgogne Europe is to provide students with a high-level general mathematical training. It should qualify the students for engineering positions that require a high mathematical background, as well as for continuing their studies in graduated schools.

**Cours du semestre 1 (septembre - janvier)
Courses of Semester 1 (September - January)**

**LM5A, Topologie des espaces métriques (Cours obligatoire - 6 ECTS - 50h)
LM5A, Topology of metric spaces (Compulsory course - 6 ECTS - 50h)**

Rappels sur la théorie des ensembles et sur nombres réels. Espaces métriques : boules, suites convergentes, espaces vectoriels normés, ouverts, fermés, intérieur, adhérence, distances équivalentes, distances topologiquement équivalentes, distance induite. Fonctions continues : fonctions uniformément continues, fonctions lipschitziennes, suites de fonctions, cas des applications linéaires continues dans les espaces vectoriels normés. Compacité : définitions, propriétés, cas des espaces vectoriels de dimension fini. Complétude : suites de Cauchy, théorème du point fixe, prolongement des applications uniformément continues, complété. Connexité : composantes connexes, connexité par arcs.

Reminders on set theory and real numbers. Metric spaces: balls, convergent sequences, normed vector spaces, open sets, closed sets, interior, closure, equivalent distances, topologically equivalent distances, induced distance. Continuous functions: uniformly continuous functions, Lipschitz functions, sequences of functions, case of continuous linear maps in normed vector spaces. Compactness: definitions, properties, case of finite-dimensional vector spaces. Completeness: Cauchy sequences, the fixed point theorem, extension of uniformly continuous functions, completeness. Connectedness: connected components, path-connectedness.

LM5B, Calcul différentiel (Cours obligatoire - 6 ECTS - 50h)

LM5B, Differential calculus (Compulsory course - 6 ECTS - 50h)

Rappels sur les espaces vectoriels normés. Applications différentiables : définitions, exemples, premières propriétés. Théorème des fonctions implicites. Théorème d'inversion locale et difféomorphismes. Sous-variétés des espaces de dimension finie : représentation paramétrique, espaces tangents. Dérivées d'ordre supérieur et étude des extrema locaux. Extremums liés.

Summary on normed vector spaces. Differential maps: definitions, examples, first properties. Implicit function Theorem. Local inversion Theorem and diffeomorphisms. Submanifolds of R^n : parametric representation, tangent spaces. Higher order derivatives and study of local extrema. Extrema with constraints.

LM5C, Théorie de la mesure et intégration (Cours obligatoire - 6 ECTS - 50h)

LM5C, Measure theory and integral calculus (Compulsory course - 6 ECTS - 50h)

Théorie de la mesure. Mesure de Lebesgue. Fonctions mesurables, étagées mesurables positives. Construction de l'intégrale de Lebesgue. Théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée. Intégrales à paramètres. Théorème de Fubini. Théorème du changement de variables.

Measure theory. Lebesgue measure. Measurable functions, positive measurable step functions. Construction of the Lebesgue integral. Monotone convergence and dominated convergence theorems. Integrals with parameters. Fubini's theorem. Change of variables theorem.

LM5D, Théorie des anneaux et des corps (Option - 6 ECTS - 50h)

LM5D, ring and field Theory (Option - 6 ECTS - 50h)

Le but de ce cours est d'étudier la structure des anneaux commutatifs et unitaires. Nous commençons avec l'étude de l'anneau des entiers et l'arithmétique, et puis on introduit les notions des anneaux euclidiens, principaux et factoriels. On analyse en détail plusieurs anneaux et corps, par exemple, les entiers de Gauss, les anneaux des polynômes et le corps des fractions d'un anneau.

The goal of this course is to study the structure of commutative unitary rings. We start with the example of the ring of integers, and its applications in arithmetic. We then introduce the notions of euclidian, principal and factorial rings. We study in detail several examples of rings and fields : Gauss integers, polynomial rings, fractions fields of rings and others.

LM5E, Algèbre linéaire et bilinéaire (Option - 6 ECTS - 50h)

LM5E, Linear and bilinear algebra (Option - 6 ECTS - 50h)

Dualité, quotient, orthogonalité. Trigonalisation et diagonalisation simultanée. Réduction de Jordan et réduction de Frobenius. Formes quadratiques, formes hermitiennes. Groupe orthogonal, groupe unitaire. Endomorphismes autoadjoints.

Duality, quotient, orthogonality. Simultaneous triangularisation and diagonalisation. Jordan normal form and Frobenius normal form. Quadratic forms, Hermitian forms. Orthogonal group, unitary group. Self-adjoint endomorphisms.

LMo5F, Analyse numérique (Option - 6 ECTS - 50h)

LMo5F, Numerical analysis (Option - 6 ECTS - 50h)

Systèmes linéaires : méthodes directes (factorisation LU, factorisation de Cholesky), normes et conditionnement d'une matrice, méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR), problèmes aux valeurs propres (méthode de la puissance, méthode QR). Systèmes non linéaires : méthode de Newton-Raphson.

Linear systems: direct methods (LU factorization, Cholesky factorization), matrix norms and conditioning, iterative methods (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR), eigenvalue problems (power method, QR method). Nonlinear systems: Newton-Raphson method.

Cours du semestre 2 (janvier - mai) **Courses of Semester 2 (January - May)**

LM6A1, Anglais (Cours obligatoire - 3 ECTS - 24h)
LM6A1, English (Compulsory course - 3 ECTS - 24h)

LM6A2, Projet (Cours obligatoire - 3 ECTS- 26h)
LM6A2, Project (Compulsory course - 3 ECTS- 26h)

Projet de calcul numérique et/ou formel à partir d'un sujet de mathématiques pures ou appliquée.

Project on numerical and/or formal calculus based on a topic in pure or applied mathematics.

LM6B1, Techniques de programmation (Option - 3 ECTS - 26h)
LM6B1, Programming techniques (Option - 3 ECTS - 26h)

Ce cours, axé sur l'investigation, comprend six chapitres. Nous introduisons les algorithmes itératifs et récurifs de base, puis les arbres binaires et autres structures de données courantes. Nous abordons les applications aux algorithmes de tri ainsi que les expériences probabilistes. Enfin, nous présentons la programmation orientée objet, permettant de réaliser des structures mathématiques sur ordinateur. Les étudiants sont censés travailler sur les projets préparés, en grande partie en autonomie, avec l'aide des intervenants.

This is an inquiry lead course which consists of six chapters. We introduce basic iterative and recursive algorithms, followed by binary trees and other commonly used data structures. We discuss applications to sorting algorithms as well as probabilistic experiments. Finally, we present object oriented programming, with the goal of realizing mathematical structures on a computer. The students are expected to work through the prepared projects mostly on their own with some help from the tutors.

LM6B2, Équations différentielles ordinaires (Option - 3 ECTS - 24h)
LM6B2, Ordinary differential equations (Option - 3 ECTS - 24h)

Théorème de l'existence et de l'unicité des solutions des équations différentielles, Théorème de redressement (flow-box), Portrait de phase Points singuliers, hyperbolicité, théorème de Hartman-Grobman, Portrait de phase des systèmes d'équations linéaires dans le plan et applications, Stabilité de Lyapunov, Bifurcation de Hopf.

Theorem of existence and uniqueness of the solutions of differential equations, Flow-box theorem, Phase portrait Singular points, hyperbolicity, Hartman-Grobman theorem, phase portrait of systems of linear equations in the plane and applications, Lyapunov stability, Hopf bifurcation.

LM6C, Théorie des groupes (Option - 6 ECTS - 50h)
LM6C, Group theory (Option - 6 ECTS - 50h)

Groupes, sous-groupes théorème de Lagrange. Morphismes, sous-groupes distingués, groupes quotients, classes de conjugaison, théorèmes d'isomorphisme, centre et sous groupes dérivés. Actions de groupes. Formule aux classes, formule de Burnside, théorème de Cauchy. Produits semi-directs. Groupes simples, groupes résolubles, p-groupes, théorèmes de Sylow.

Groups, subgroups Lagrange's theorem. Morphisms, normal subgroups, quotient groups, conjugation classes, isomorphism theorems, center and derived subgroups. Group actions. Class formula, Burnside formula, Cauchy's theorem. Semi-direct products. Simple groups, solvable groups, p -groups, Sylow theorems.

LM6D, Analyse fonctionnelle (Option - 6 ECTS - 50h)

LM6D, Functional analysis (Option - 6 ECTS - 50h)

Les thèmes abordés dans cette unité d'enseignement sont les suivants : les espaces de Banach, les espaces L^p (propriétés fondamentales, densité des fonctions étagées, densité des fonctions continues à support compact, séparabilité, produit de convolution, densité des fonctions de classe C^∞ à support compact), les espaces d'Hilbert (géométrie des espaces de Hilbert, dualité, bases hilbertiennes), les séries de Fourier (théorème de Dirichlet, Convergence dans les espaces L^p et des fonctions continues périodiques), la transformée de Fourier (Classe de Schwartz, transformée de Fourier dans L^1 , formule d'inversion, transformée de Fourier et dérivation dans l'espace de Schwartz, transformée de Fourier dans L^2). Chaque thème est accompagné d'applications.

The topics covered in this course are as follows: Banach spaces; L^p spaces (fundamental properties, density of step functions, density of continuous functions with compact support, separability, convolution product, density of C^∞ functions with compact support); Hilbert spaces (geometry of Hilbert spaces, duality, Hilbert bases); Fourier series (Dirichlet's theorem, convergence in L^p spaces and in continuous periodic functions space); and the Fourier transform (Schwartz class, Fourier transform in L^1 , inversion formula, Fourier transform and differentiation in the Schwartz space, Fourier transform in L^2). Each topic is illustrated through applications.

LM6E, Théorie des probabilités (Option - 6 ECTS - 50h)

LM6E, Probability theory (Option - 6 ECTS - 50h)

Espaces probabilisés : mesure, densité de probabilité, mesure image. Énoncé du théorème d'unicité. Variables aléatoires discrètes et continues, théorème de transfert. Intégrale par rapport à une mesure quelconque, retour sur l'espérance. Moments. Fonctions de répartition : définition, caractérisation de la loi. Fonctions caractéristiques : définition et énoncé du théorème de caractérisation de la loi. Suite de variables aléatoires indépendantes. Différentes notions de convergence. Loi faible (et forte avec un moment d'ordre 2) des grands nombres. Convergence en loi et Théorème de la Limite centrale. Introduction aux chaînes de Markov.

Probability spaces: measure, probability density, image measure. Statement of the theorem of uniqueness. Discrete and continuous random variables, transfer theorem. Integral in relation to any measure, return to expected values. Moments. Distribution functions: definition, characterization of the law. Characteristic functions: definition and statement of the characterization theorem of the law. Sequence of independent random variables. Different notions of convergence. Weak (and strong with a moment of order 2) law of large numbers. Convergence in law and the Central Limit Theorem. Introduction to Markov chains.

LM6F, Statistique inférentielle (Option - 6 ECTS - 50h)

LM6F, Inferential Statistics (Option - 6 ECTS - 50h)

Ajustement affine d'une série statistique double : droite des moindres carrés. Fonction de répartition et théorèmes asymptotiques. Estimation ponctuelle et estimation par intervalle de confiance. Tests d'hypothèses. Les travaux pratiques, basés sur des jeux de données réelles ou des données recueillies en cours, se feront avec R.

Linear fitting of a double statistical series: least squares line. Cumulative distribution function and asymptotic theorems. Point estimation and confidence interval estimation.

Hypothesis testing. Practical work, based on real datasets or data collected during the course, will be carried out using R.

LM6G, Géométrie différentielle (Option - 6 ECTS - 50h)

LM6G, Differential geometry (Option - 6 ECTS - 50h)

Courbes paramétrées, reparamétrisations, longueur. Courbes planes: comportement local et asymptotique, courbure, exemples, théorème fondamental. Courbes dans l'espace: courbure et torsion, repère de Frenet, exemples, théorème fondamental. Nappes paramétrées et surfaces: quadriques, application de Gauss, première et seconde formes fondamentales, courbures et Théorème extraordinaire de Gauss.

Parametrized curves, reparametrizations, length. Plane curves: local and asymptotic behavior, curvature, examples, fundamental theorem. Space curves: curvature and torsion, Frenet frame, examples, fundamental theorem. Parametrized sheets and surfaces: quadrics, Gauss map, first and second fundamental forms, curvatures, and Gauss Theorema Egregium.

LM6H Consolidation des connaissances mathématiques (Option - 6 ECTS - 50h)

LM6H, Consolidation of mathematical knowledge (Option - 6 ECTS - 50h)

Ce module donne des compléments pour la préparation aux épreuves disciplinaires écrites et orales du concours du CAPES niveau L3 pour le recrutement des professeurs certifiés de mathématiques de l'enseignement secondaire.

This module gives supplements for the preparation of written and oral disciplinary tests for the CAPES level L3 competition for the recruitment of certified teachers of mathematics in secondary education.

LM6I - Mathématiques de l'intelligence artificielle (Option - 6 ECTS- 50h)

LM6I - Mathematics of Artificial Intelligence (Option - 6 ECTS- 50h)

Ce cours propose une introduction progressive aux fondements des réseaux de neurones et de l'apprentissage automatique, en mêlant théorie rigoureuse, mise en pratique et ouverture vers les applications actuelles. La première partie du cours est consacrée aux outils classiques de l'apprentissage supervisé. Les étudiants abordent la régression polynomiale et binaire, avant de plonger dans le monde des réseaux de neurones, leur capacité d'approximation universelle, et la célèbre méthode de rétropropagation du gradient. Alternant cours magistraux et séances de TD/TP, cette section permet de comprendre les mécanismes de base du machine learning. La seconde partie du cours, plus théorique, introduit les problèmes de transport optimal (Monge et Kantorovich), la métrique de Wasserstein, ainsi que les formulations duales associées. À travers l'étude de la programmation linéaire, des techniques de régularisation (comme l'algorithme de Sinkhorn) et des applications en optimisation, les étudiants découvrent comment ces concepts s'intègrent dans des approches modernes d'apprentissage et de modélisation. Le cours aborde également des notions avancées comme la différentiation à travers le transport, les barycentres de Wasserstein ou encore les estimateurs de Kantorovich.

This course offers a gradual introduction to the foundations of neural networks and machine learning, combining rigorous theory, practical implementation, and insights into current applications. The first part of the course focuses on the classical tools of supervised learning. Students begin with polynomial and binary regression before delving into the world of neural networks, their universal approximation capabilities, and the well-known backpropagation algorithm. Alternating between lectures and practical sessions, this section provides a solid understanding of the fundamental mechanisms of machine learning. The second part of the course, which is more theoretical, introduces optimal transport problems (Monge and Kantorovich), the Wasserstein metric, and the associated dual formulations. Through the study of linear programming, regularization

techniques (such as the Sinkhorn algorithm), and applications in optimization, students discover how these concepts fit into modern approaches to learning and modeling. The course also covers advanced topics such as differentiation through transport, Wasserstein barycenters, and Kantorovich estimators.